

4. チェイン・ルール

4.1 行列とベクトルの演算

2 変数, 3 変数の関数を扱う際に必要なベクトル・行列¹⁾の演算をまとめておく. ここでは数 (スカラー) は実数とする.

数を n 個横に並べたものを n 次行ベクトル, 縦に並べたものを n 次列ベクトルという²⁾. たとえば

$$(1, 2), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (1, 2, 3), \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ 2 次行ベクトル, 2 次列ベクトル, 3 次行ベクトル, 3 次列ベクトルである. この講義では, ベクトルを通常列ベクトルの形に表し, 一つの文字で表すときは, ローマ文字の太字を用いる:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^t(x_1, x_2), \quad {}^t\boldsymbol{x} = (x_1, x_2).$$

ここで ${}^t(*)$ は, 行 (列) ベクトルの各成分を縦 (横) に並べ直す操作 (転置) を表す³⁾. 一方, 第 3 回の (3.6) のように全微分は行ベクトルを用いて表す. 行ベクトルと列ベクトルの積を次のように定める (順番に注意):

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2, \quad (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

高等学校で学んだベクトルの内積は $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ と表すことができる.

数を 2×2 (3×3) の正方形にならべたものを 2 次 (3 次) 正方行列という⁴⁾. 以下簡単のために次数を 2 に限るが, 3 次の場合も想像してほしい.

ここでは, 正方行列を表すのにローマ文字の大文字を用いる. 行列 A を

$$(4.1) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \quad \left(\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) \\ = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} \alpha_1 = (a_{11}, a_{12}) \\ \alpha_2 = (a_{21}, a_{22}) \end{matrix} \right)$$

と書くとき, 第一行の右辺の式を行列 A の列ベクトルへの分解, 第二行の式を行ベクトルへの分解という.

正方行列 A を (4.1) のように表すとき, これに列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 行ベクトル ξ を掛ける演算を次のように定義する:

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{x} \\ \alpha_2 \boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad \xi A = (\xi \boldsymbol{a}_1, \xi \boldsymbol{a}_2).$$

これを用いて正方行列 A と B の積を次のように定める:

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 & \alpha_1 \boldsymbol{b}_2 \\ \alpha_2 \boldsymbol{b}_1 & \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} \quad \left(A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) \right).$$

正方行列と列ベクトルの積は列ベクトル, 行ベクトルと正方行列の積は行ベクトル, 正方行列と正方行列の積は正方行列である.

2 次正方行列 A に対して

$$(4.2) \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad \left(E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

をみたす正方行列 A^{-1} が存在するとき, A は正則行列であるといい, A^{-1} を A の逆行列という. ここで E は 2 次の単位行列といい, 次の性質を満たす⁵⁾: 任意の 2 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 2 次行ベクトル ξ , 2 次正方行列 A に対して

$$(4.3) \quad E\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \xi E = \xi, \quad EA = AE = A.$$

式 (4.1) の形の A に対して

$$(4.4) \quad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

で定まるスカラー $\det A$ を A の行列式とよぶ⁶⁾. 行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A \neq 0$ であり, このとき, A^{-1} は次のように表される.

$$(4.5) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

^{*)}2018 年 5 月 7 日/11 日

¹⁾ベクトル: a vector, 英語の発音から “ヴェクタ” と読むべき気がする. 行列: a matrix, matrices. 行列の一般論や詳細は「線形代数学第一」で扱う.

²⁾スカラー: a scalar; 行ベクトル: a row vector; 列ベクトル: a column vector.

³⁾転置: transposition.

⁴⁾正方行列: a square matrix.

⁵⁾正則行列: a regular matrix; 逆行列: the inverse matrix; 単位行列: the identity matrix.

⁶⁾行列式: determinant.

4.2 方向微分

ここでは 2 変数関数 $f(x, y)$ を, ベクトル $x = {}^t(x, y)$ に対して数 $f(x) = f(x, y)$ を対応させる規則だと見なす⁷⁾. 例 3.22 の (1) で挙げた, 点 $P = {}^t(a, b)$ を出発して一定の速度 $v = {}^t(v_1, v_2)$ で動く点の運動 $\gamma(t)$ を考えよう:

$$\gamma(t) = P + tv = {}^t(a + v_1t, b + v_2t).$$

定義 4.1. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が, 点 $P = (a, b) \in D$ において $v = {}^t(v_1, v_2)$ 方向に方向微分可能であるとは, 1 変数関数

$$F(t) := f(a + v_1t, b + v_2t) = f(P + tv)$$

が $t = 0$ で微分可能となることである. このとき, 微分係数 $F'(0)$ を f の P における v 方向の方向微分といい⁸⁾, どんなベクトル v に対しても v 方向に方向微分可能なとき, f は P で方向微分可能という.

命題 3.23 から次がわかる:

命題 4.2. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $P = (a, b) \in D$ で微分可能ならば f は P で方向微分可能である. とくに v 方向の方向微分は次で与えられる:

$$(4.6) \quad (df)_P v = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)v_2 \quad \left(v = {}^t(v_1, v_2)\right).$$

■ 勾配ベクトル 点 P を含む領域で定義された微分可能な関数 f に対して

$$\text{grad } f_P := \begin{pmatrix} f_x(a, b) \\ f_y(a, b) \end{pmatrix} = {}^t((df)_P)$$

で定まるベクトルを f の P における勾配ベクトルという⁹⁾. これを用いると, 方向微分 (4.6) は内積 “ $\cdot$ ” を用いて

$$(df)_P v = (\text{grad } f_P) \cdot v$$

と表すことができる. 勾配ベクトル $\text{grad } f_P$ が零ベクトルでないとき, このベクトルは P を通る f の等高線に垂直な方向を与えている (問題 4-4).

⁷⁾ 関数の定義域の点の座標は行ベクトルで表したが, これからしばらくの間は列ベクトルで表すことにする.

⁸⁾ 方向微分: the directional derivative.

⁹⁾ 勾配ベクトル: the gradient vector.

4.3 合成関数の微分 (チェイン・ルール)

曲線に沿う微分の公式 (命題 3.23) と偏微分の意味から直ちに次のことがわかる:

定理 4.3 (チェイン・ルール¹⁰⁾). 2 変数関数 $f(x, y)$ と, 2 つの 2 変数関数

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

がともに微分可能であるとき¹¹⁾, 2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

は微分可能で, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi, \eta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

注意 4.4. 物理学や工学では, 定理 4.3 の $\tilde{f}(\xi, \eta)$ のことを $f(x, y)$ と同じ f を用いて $f(\xi, \eta)$ のように表すことがある. 文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である. このとき (適当に省略して) 定理 4.3 の結論を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる. さらに, 従属変数に名前をつけて

$$z = f(x, y) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \tilde{f}(\xi, \eta)$$

と表して次のように書くこともできる:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

■ $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とその微分 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を考える. これは D の各点 (x, y) に対して $\mathbb{R}^2$ の要素 $F(x, y)$ を対応させる対応の規則である. $F(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ の要素だから, それを (ξ, η) と書けば, 各 ξ, η は (x, y) の関数だから, 写像 $F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ とは領域

¹⁰⁾ チェイン・ルール: the chain rule.

¹¹⁾ ξ : xi; η : eta. ギリシア文字 ξ, η, ζ (zeta) はしばしばローマ文字 (x, y, z) の対応物として使われる.

$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 個の関数の組とみなすことができる：

$$(4.7) \quad F: \mathbb{R}^2 \supset D \ni (x, y) \mapsto (\xi(x, y), \eta(x, y)) \in \mathbb{R}^2.$$

このとき、2 つの 2 変数関数 $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ を F の成分とよぶ¹²⁾。式が長くなるのを避けるために、ベクトル記法を用いて

$$\xi = F(x) \quad (\xi = (\xi, \eta), \ x = (x, y))$$

などと書くことがある。写像 $F = (\xi, \eta): \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ が C^k -級¹³⁾ であるとは¹³⁾、各成分 ξ, η が C^k -級 (26 ページ) となることである。

定義 4.5. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^1 -級写像 $F = (\xi, \eta): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次正方行列を F の微分またはヤコビ行列¹⁴⁾ という。

■ 合成写像・逆写像とその微分 領域 $D, U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^2, G: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ が、任意の $x = (x, y) \in D$ に対して $F(x) \in U$ をみたすとき、

$$G \circ F: \mathbb{R}^2 \supset D \ni x \mapsto G(F(x)) \in \mathbb{R}^2$$

で与えられる写像 $G \circ F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ を F と G の合成写像¹⁵⁾ という。

命題 4.6. 上の状況で、 F, G がともに C^1 -級ならば

$$d(G \circ F) = dG dF, \quad \text{すなわち} \quad d(G \circ F)(x) = dG(F(x)) dF(x)$$

が成り立つ。ただし右辺の積は行列の積を表す。

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の各点 x に対してそれ自身を対応させる写像

$$\text{id}_D: D \ni x \mapsto \text{id}_D(x) = x \in D$$

を D 上の恒等写像¹⁶⁾ という。領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ から $U \subset \mathbb{R}^2$ への写像 $F: D \rightarrow$

U に対して、 $G \circ F = \text{id}_D, F \circ G = \text{id}_U$ をみたす写像 $G: U \rightarrow D$ が存在するとき、 G を F の逆写像といい、 $G = F^{-1}$ と書く¹⁷⁾。

例 4.7. 領域

$$D = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}, \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$$

に対して

$$F: D \ni (r, \theta) \mapsto F(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in U,$$

$$G: U \ni (x, y) \mapsto G(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} \right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}, F = G^{-1}$ である。実際、 $(r, \theta) \in D$ に対して $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\text{Tan}^{-1} \tan \theta = \theta$ (定義 1.6 参照) だから、 $r > 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned} G \circ F(r, \theta) &= G(r \cos \theta, r \sin \theta) = \left(\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}, \text{Tan}^{-1} \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} \right) \\ &= (r, \text{Tan}^{-1} \tan \theta) = (r, \theta) = \text{id}_D(r, \theta). \end{aligned}$$

一方、 $\theta = \text{Tan}^{-1}(y/x)$ とすると、逆正接関数の定義から $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos \theta > 0$ 。したがって、 $x > 0$ に注意して

$$\begin{aligned} \cos \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} &= \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \\ &= \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x} &= \sin \theta = \cos \theta \tan \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

これから $F \circ G(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{Tan}^{-1} \frac{y}{x}\right) = (x, y) = \text{id}_U(x, y)$. ◇

注意 4.8. 座標平面上の点 (x, y) に対して例 4.7 のように $(r, \theta) = G(x, y)$ と定めるとき、 (r, θ) を座標平面の極座標¹⁸⁾ という。これに対して、 (x, y) を直交座標系¹⁸⁾ あるいはデカルト座標系¹⁸⁾ という。

¹²⁾ 写像: a map; 成分: components.

¹³⁾ 本来なら微分可能性から定義していくべきだが、簡単のため C^k -級¹³⁾ の概念だけを定義しておく。こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない。

¹⁴⁾ 微分: the differential; ヤコビ行列: the Jacobian matrix; ヤコビ: Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851, D).

¹⁵⁾ 合成: the composition.

¹⁶⁾ 恒等写像: the identity map; 定義域 D が文脈より自明な場合は、 id_D を単に id と書く場合がある。

¹⁷⁾ 逆写像: the inverse map; F^{-1} : the inverse of F /F-inverse;

¹⁸⁾ 極座標: the polar coordinate system; 直交座標系: the orthognonal coordiante system; デカルト座標系: the Cartesian coordinate system; デカルト: Descartes, René (Renatus Cartesius; 1596–1650).

例 4.7 の表示では, (x, y) 平面の右半分しか極座標で表示できないが, 通常は次のように平面のほぼ全体を表せるように拡張する: 領域

$$\tilde{D} = \{(r, \theta) \mid r > 0, -\pi < \theta < \pi\}, \quad \tilde{U} = \{(x, y) \mid y \neq 0 \text{ または } x > 0\}$$

を考え, $h: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$h(x, y) := \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & (x > 0) \\ -\tan^{-1} \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y > 0) \\ -\tan^{-1} \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2} & (x \leq 0, y < 0) \end{cases}$$

と定め¹⁹⁾,

$$\tilde{F}: \tilde{D} \ni (r, \theta) \mapsto \tilde{F}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \tilde{U},$$

$$\tilde{G}: \tilde{U} \ni (x, y) \mapsto \tilde{G}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, h(x, y)) \in \tilde{D}$$

とおけば $\tilde{F} = \tilde{G}^{-1}$, $\tilde{G} = \tilde{F}^{-1}$ となる. 座標平面上の点 (x, y) に対応する $(r, \theta) = \tilde{G}(x, y)$ を (x, y) の極座標という.

命題 4.9. 写像 $F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ が逆写像 $G = F^{-1}$ をもち, F, F^{-1} ともに C^1 -級ならば,

$$dF^{-1} = (dF)^{-1} \quad \text{すなわち} \quad d(F^{-1})(F(x)) = (dF(x))^{-1}$$

が成り立つ. ただし右辺の “ -1 ” は 正方行列の逆行列を表す.

証明. 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して, $F^{-1} \circ F = \text{id}_D$ に命題 4.6 を適用すれば $dF^{-1}dF = E$, また $F \circ F^{-1} = \text{id}_U$ に命題 4.6 を適用すれば $dFdF^{-1} = E$. したがって dF^{-1} は dF の逆行列である. $\square$

■ 変数変換

例 4.10 (平面極座標とラプラシアン). 例 4.7 の状況を考える:

$$(4.8) \quad x = x(r, \theta) = r \cos \theta, \quad y = y(r, \theta) = r \sin \theta.$$

このとき $F: (r, \theta) \mapsto (x, y)$ の微分 (定義 4.5) は

$$(4.9) \quad dF = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

¹⁹⁾ $h(x, y)$ は原点 $(0, 0)$ と点 (x, y) を結ぶ平面上の有向線分が x 軸の正の部分と成す角を表している. この関数は, たとえば C や Fortran などでは $\text{atan2}(x, y)$ という関数として実装されている.

だから, その逆写像 $G = F^{-1}$ の微分は, 命題 4.9 と逆行列の公式 (4.5) から

$$(4.10) \quad dG = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = (dF)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$$

となる. したがって

$$(4.11) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

平面上の C^2 -級関数 $f(x, y)$ に対して

$$(4.12) \quad \Delta z = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

を対応させる Δ をラプラス作用素またはラプラシアンという (例 2.10). いま, $f(x, y)$ を (4.8) によって (r, θ) の関数とみなしたとき, Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表そう. 式 (4.11) を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta f_{rr} - \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \sin^2 \theta f_r + \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta f_{rr} + \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta f_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \cos^2 \theta f_{\theta\theta} + \frac{1}{r} \cos^2 \theta f_r - \frac{2}{r^2} \sin \theta \cos \theta f_\theta \end{aligned}$$

なので, 次を得る.

$$(4.13) \quad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}. \quad \diamond$$

4.4 陰関数

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $F(x, y)$ に対して, 式 $F(x, y) = 0$ は x と y の関係式である. これを “ y について解く” ことができたとき:

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

このとき, 関係式 $F(x, y) = 0$ は関数 $y = \varphi(x)$ を暗に表しているので, $y = \varphi(x)$ の陰関数²⁰⁾ 表示という.

例 4.11. (1) $F(x, y) = 2x - 3y + 5$ とすると, $F(x, y) = 0$ は $y = \frac{1}{3}(2x + 5)$ と書ける. また, 同じ式は $x = \frac{1}{2}(3y - 5)$ と書ける.

(2) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とおくと, 関係式 $F(x, y) = 0$ は y について解

²⁰⁾ 陰関数: an implicit function.

けない．しかし， F の定義域を $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ に限ると

$$(x, y) \in U \text{ かつ } F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

と， y は x の関数とみなせる．同様に定義域を $U' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ に限れば，関係式は関数 $y = -\sqrt{1-x^2}$ を与える．また，定義域を $\{(x, y) \mid x > 0\}$ とすれば， $F(x, y) = 0$ は $x = \sqrt{1-y^2}$ と書ける．◇

■ 陰関数定理 一般に $f(x, y) = 0$ が y についてとけるか否かを判定するのは難しいが，次の十分条件が知られている：

定理 4.12 (陰関数定理の特別な場合)．領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k -級関数 $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $(x_0, y_0) \in D$ をとる．もし， $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば， P を含む領域 $U \subset D$ と， $\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k -級の 1 変数関数 $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

$$(x, y) \in U \text{ かつ } F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in I \text{ かつ } y = \varphi(x).$$

とくに各 $x \in I$ に対して $F(x, \varphi(x)) = 0$ が成立する．

定理の結論は， P の十分近くで， $F(x, y) = 0$ が y について解けることを表している．また，定理 4.12 で変数 x と y の役割を取り替えれば， $F_x(P) \neq 0$ ならば P の近くで $F(x, y) = 0$ は x について解けることもわかる．

変数の個数が多いときも同様の性質が成り立つ．

例 4.13. $\mathbb{R}^3$ で定義された 3 変数関数 $F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ は C^∞ -級である．点 $P = (0, 0, 1)$ は $F(P) = 0$ をみたしているが，さらにまた $F_z(P) = 2 \neq 0$ が成り立つ．このとき， $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ ， $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とすると，

$$F(x, y, z) = 0 \text{ かつ } (x, y, z) \in U \Leftrightarrow z = \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ かつ } (x, y) \in V$$

となる．すなわち $F(x, y, z) = 0$ は z について解ける．集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面だが，関係式を z について解いて，“北半球”のグラフ表示が得られたことになる²¹⁾．◇

²¹⁾ 球面：a sphere; これは球の表面を表す．中身の詰まった球は，単に球 a ball，あるいは球体という．北半球：the Northern Hemisphere.

■ なめらかな曲線 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞ -級関数 F に対して，集合 $C = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$ を考える．点 $P \in C$ に対して， P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U をうまくとれば，共通部分 $C \cap U$ が C^∞ -級関数のグラフと合同となるとき， C は P の近くでなめらかな曲線²²⁾ であるということにする．各点の近くでなめらかな曲線であるとき C を単になめらかな曲線であるという．例 4.14. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は原点を中心とする半径 1 の円²³⁾ となるが，これはなめらかな曲線である．実際，点 $P \in C$ は

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x, y) \mid y > 0\}, & U_2 &:= \{(x, y) \mid y < 0\}, \\ U_3 &:= \{(x, y) \mid x > 0\}, & U_4 &:= \{(x, y) \mid x < 0\} \end{aligned}$$

のいずれかの要素となるが，各 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して $C \cap U_j$ は C^∞ -級関数 $\sqrt{1-x^2}$ ($-1 < x < 1$) のグラフと合同である．◇

定理 4.12 から次がすぐにわかる：

命題 4.15. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞ -級関数 F に対して $C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$ とおく．各 $P \in C$ で $(dF)_P \neq (0, 0)$ ならば C はなめらかな曲線である．

例 4.16. 関数 $F(x, y) := 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$ に対して

$$dF_{(x,y)} = (4x(1-x^2-y^2), -4y(1+x^2+y^2))$$

だから $dF_{(x,y)} = (0, 0)$ となるのは $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$ のときのみである．とくに $F(\pm 1, 0) \neq 0$ ， $F(0, 0) = 0$ なので， $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ は $(0, 0)$ の近くをのぞいてなめらかな曲線である．この曲線はレムニスケート²⁴⁾ とよばれる（問題 4-9 の $a = 0$ の場合）．◇

■ 陰関数の微分法

命題 4.17. 定理 4.12 の状況で $F(x, y) = 0$ が $y = \varphi(x)$ の陰関数表示となっているとき，次が成り立つ：

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \bigg/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \quad (y = \varphi(x)).$$

²²⁾ なめらかな曲線：a smooth curve.

²³⁾ 円：a circle; 原点を中心とする半径 1 の円：the circle centered at the origin with radius 1.

²⁴⁾ レムニスケート：the lemniscate.

証明．恒等式 $F(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると，命題 3.23 (定理 4.3) により

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \frac{d\varphi(x)}{dx} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{d\varphi(x)}{dx}. \end{aligned}$$

定理 4.12 の仮定から，考えている点の近くで $F_y \neq 0$ だから結論を得る． $\square$

命題 4.17 の結論の式を次のように書くこともある： $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ ．

同様に， $F(x, y) = 0$ が $x = \psi(y)$ の陰関数表示で， $F_x \neq 0$ であるとき，

$$\frac{d\psi}{dy}(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \quad (x = \psi(y)) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}.$$

問 題 4

4-1 命題 4.2 を確かめなさい．

4-2 平面上の点 (x, y) における標高が，多項式 $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ で表されているような世界があるとす．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くと，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる経路上の部分を描きなさい．ヒント：考えている旅は例 3.22 の (2) である．

4-3 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．このとき， f の点 P における単位ベクトル v 方向の方向微分 $(df)_P(v)$ が最大になるのは v が $(\text{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント： v は単位ベクトルであることに注意．

4-4 点 $P = (a, b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0, 0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ($\gamma(0) = P$) とパラメータ表示するとき， $t = 0$ における γ の速度ベクトル $\dot{\gamma}(0)$ は $(\text{grad } f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．

4-5 定数 $c (\neq 0)$ に対して $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ により変数変換 $(t, x) \mapsto (\xi, \eta)$ を定める．このとき， C^2 -級関数 $f(t, x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$$

となることを確かめなさい．さらに， $f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0$ を満たす C^2 -級関数 f は，2 つの C^2 -級の 1 変数関数 F, G を用いて $f(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$ という形に書けることを示しなさい．

方程式 $f_{tt} = c^2 f_{xx}$ を波動方程式という (例 2.12)．ここに述べたことを，“波動方程式のダランベールの解法²⁵⁾” という (第 2 回の問題 2-11)．

4-6 空間のスカラー場 $f(x, y, z)$ に対して $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ を対応させる Δ を空間のラプラス作用素という (第 2 回の問題 2-13)．空間の変数変換

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \cos \varphi, & z &= r \sin \varphi \\ & & & & & (r > 0, -\pi < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{\cos \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{\cos \varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} f_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} f_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r^2} \tan \varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい．

4-7 $F(x, y) = x^2 - y^3$ とするとき $F(x, y) = 0$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ，この図形の形を描きなさい．

4-8 定理 4.12 の状況，すなわち $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ の点 $P = (x_0, y_0)$ において $F_y \neq 0$ であり， P の近くで C がグラフ $y = \varphi(x)$ と表されているとする．このとき次を示しなさい：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi''(x) = -\frac{F_{xx} F_y^2 - 2F_{xy} F_x F_y + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}.$$

ただし，右辺の F_{xx} などは $(x, \varphi(x))$ における値を表す．

4-9 定数 a に対して $F(x, y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2 - a$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$ とおく．このとき C がグラフ $y = \varphi(x)$ と書けるような範囲を調べ，そこでの φ の増減，変曲点を調べ C の形を描きなさい (ヒント： a の値によって場合分けが起きる)．

4-10 $\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞ 級の 3 変数関数 $F(x, y, z)$ を用いて関係式 $F(x, y, z) = 0$ を考える．とくに，点 $P = (a, b, c)$ において $F(P) = F(a, b, c) = 0$ が成り立ち，さらに， P において F_x, F_y, F_z のいずれもが 0 でないとする．このとき， P の近くで $F(x, y, z) = 0$ は x, y, z のいずれの変数についても解くことができる：

$$F(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \xi(y, z), \quad y = \eta(z, x), \quad z = \zeta(x, y).$$

点 P の近くで $F(x, y, z) = 0$ が成り立っているとき，

$$\frac{\partial \xi}{\partial y}(y, z) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z}(z, x) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, y) = -1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

であることを確かめなさい．

²⁵⁾ダランベール：d'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783, F)．