微分積分学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と所定の**持込用紙**を回収します．問題用紙は持ち帰ってください．
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません．問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 成績処理後，答案を**数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします．返却日時は，電子メイル（「キーワード」をお送りしているアドレスです）にてお知らせします.
- 採点に関して質問・クレイムは，日程を限って電子メイルにて受け付けます．期日は概ね答案返却日から 2–3 日後，上記電子メイルにてお知らせしておきます．なお，管理の都合上，期日以降のクレイムは，**たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**．ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 文中の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{21}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [55 点]

uv 平面上の領域 $D=\{(u,v)\,|\,u>0, -\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}\}$ で定義された 2 つの 2 変数関数の組

$$(1)\qquad x=x(u,v)=2u\cos v,\qquad y=y(u,v)=u\sin v$$

を考えると，関数 $x(u,v)$ の偏導関数は $\boxed{1}$, 2 次偏導関数は $\boxed{2}$ である．
また，$y(u,v)$ の偏導関数は $\boxed{3}$ だから，y の全微分 dy は $\boxed{4}$ となる．
いま，x, y の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して，(1) を用いて

$$\tilde{f}(u,v):=f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$$

によって (u,v) の関数 $\tilde{f}$ を定義すると，チェイン・ルールより

$$(2)\quad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial u}(u,v)=\boxed{5}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\boxed{6}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),\qquad \frac{\partial\tilde{f}}{\partial v}(u,v)=\boxed{7}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\boxed{8}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

が成り立つ[*]．ただし，それぞれの右辺の (x,y) は $(x(u,v),y(u,v))$ を表す．式 (2) を $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ についてとくと，

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\boxed{9}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u}+\boxed{10}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial v},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\boxed{11}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial u}+\boxed{12}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial v}$$

が成り立つ．この式の両辺をさらに x, y で偏微分すると，

$$f_{xx}=\boxed{13}\tilde{f}_{uu}+\boxed{14}\tilde{f}_{uv}+\boxed{15}\tilde{f}_{vv}+\boxed{16}\tilde{f}_u+\boxed{17}\tilde{f}_v$$

と書ける[†]．同様に $f_{xy}=\boxed{18}$, $f_{yy}=\boxed{19}$ のように $\tilde{f}$ の (u,v) に関する偏導関数を用いた表示が得られる．とくに，

$$(4)\qquad 4f_{xx}+f_{yy}=\boxed{20}$$

と $\tilde{f}$ の (u,v) に関する 2 次までの偏導関数を用いて表されるので，一変数関数 F を用いて

$$f(x,y)=F\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}\right)$$

と表される関数 f が $4f_{xx}+f_{yy}=0$7 を満たすならば，関数 F は $F(u)=\boxed{21}$ である．

[*] $\boxed{5}$–$\boxed{12}$: u, v の具体的な関数を入れる.
[†] $\boxed{13}$–$\boxed{19}$: u, v の具体的な関数を入れる.

問題 B 文中の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 12\ }$ に最もよく充てはまる数・式を入れなさい． [30 点]

重積分

$$I := \iint_D \frac{x^2 y}{1+x^6}\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq y \leqq x^3, 0 \leqq x \leqq 1\}$$

は，

$$I = \int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} dx \int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}} \frac{x^2 y}{1+x^6}\,dy = \int_{\boxed{5}}^{\boxed{6}} dy \int_{\boxed{7}}^{\boxed{8}} \frac{x^2 y}{1+x^6}\,dx$$

と，ふた通りの累次積分で表すことができる．いま，変数変換

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

を考える．この変数変換のヤコビ行列式は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \boxed{\ 9\ }$ だから，重積分の変数変換の公式により，

$$I = \iint_{\widetilde{D}} \boxed{\ 10\ }\,dr\,d\theta \qquad \widetilde{D} = \{(r,\theta)\,|\,\boxed{\ 11\ }\}$$

が成り立つ[‡]．これらの式のうちどれか一つを計算すれば $I = \boxed{\ 12\ }$ であることがわかる．

問題 C [15 点]

(1) 次は正しいか．理由を付けて答えなさい：区間 $[0,\infty)$ で連続で，負の値をとらない一変数関数 f が，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ を満たすならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ は収束する．

(2) 次は正しいか．理由を付けて答えなさい：二変数関数 g が (a,b) で微分可能ならば g は (a,b) で連続である．

(3) xy-平面上の集合 $D := \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1, x+y \geqq 0\}$ の形の板を考える．板の点 (x,y) における面密度が $(x+y)\mathrm{kg/m^2}$ のとき，板の質量を求めなさい．ただし x, y 座標の単位は m とする．

問題 D [0 点] 何か言い残すことがありましたらお書きください．

おつかれさまでした ♡

[‡] $\boxed{\ 10\ }$: (r,θ) の具体的な関数が入る；$\boxed{\ 11\ }$: (r,θ) の具体的な条件が入る．

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：各 5 点．ただし 5–8/9–12/13–17 はまとめて 5 点

1
$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2\cos v,\qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -2u\sin v.$$

2
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0,\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -2u\cos v,\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u} = -2\sin v.$$

3
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sin v,\ \frac{\partial y}{\partial v} = u\cos v.$$

4
$$(\sin v, u\cos v) = \sin v\,du + u\cos v\,dv$$

5	6	7	8
$2\cos v$	$\sin v$	$-2u\sin v$	$u\cos v$

9	10	11	12
$\frac{1}{2}\cos v$	$\frac{-1}{2u}\sin v$	$\sin v$	$\frac{1}{u}\cos v$

13	14	15	16	17
$\frac{1}{4}\cos^2 v$	$-\frac{\sin v\cos v}{2u}$	$\frac{\sin^2 v}{4u^2}$	$\frac{\sin^2 v}{4u}$	$\frac{\sin v\cos v}{2u^2}$

18
$$\frac{1}{2}\left(\sin v\cos v\,\tilde f_{uu} + \frac{1}{u}(\cos^2 v - \sin^2 v)\tilde f_{uv} - \frac{1}{u^2}\sin v\cos v\,\tilde f_{vv} - \frac{1}{u}\sin v\cos v\,\tilde f_u + \frac{1}{u^2}(\sin^2 v - \cos^2 v)\tilde f_v\right)$$

19
$$\sin^2 v\,\tilde f_{uu} + \frac{2}{u}\sin v\cos v\,\tilde f_{uv} + \frac{1}{u^2}\cos^2 v\,\tilde f_{vv} + \frac{\cos^2 v}{u}\tilde f_u - \frac{2\sin v\cos v}{u^2}\tilde f_v$$

20
$$\tilde f_{uu} + \frac{1}{u}\tilde f_u + \frac{1}{u^2}\tilde f_{vv}$$

21
$a\log u + b$ (a, b は定数)

学籍番号								氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–4/5–8: 各 5 点；残り各 5 点

1 0	2 1	3 0	4 x^3	5 0	6 1	7 $\sqrt[3]{y}$	8 1
9 r	10 $\dfrac{r^4\cos^2\theta\sin\theta}{1+r^6\cos^6\theta}$	11 $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}, \sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\cos^3\theta}} \leqq r \leqq \dfrac{1}{\cos\theta}$	12 $\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$				

- 問題 A：最後の行に誤りがありました：$f_{xx}+4f_{yy} \Rightarrow 4f_{xx}+f_{yy}$．訂正後の問題とみなして解答された方は正解．そうでない方で「正解である」という方は電子メイルにてクレイムをつけてください．
- 問題 C (1)：$f(x)=1/x$ は $[0,\infty)$ で連続ではありません．
- 問題 C (2)：「自明」「明らか」と書かれた方，そうならば一言で理由が説明できるはず．これらは理由が説明できないことをごまかす単語ではありません．
- 問題 C (2)：「連続でない」ということは「$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(a+h,b+k) \neq g(a,b)$」ということではありません．これでは「極限値の存在」を仮定してしまっています．

学籍番号								氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

(1) [×]← 正しければ○，正しくなければ×を入れる

理由：
$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ とすると，f は $[0,\infty)$ で連続，$f(x)\geqq 0$ $(x\in[0,+\infty))$，かつ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を満たす．
一方，正の数 M に対して

$$\int_0^M f(x)\,dx=[\log(1+x)]_0^M=\log(1+M)\to+\infty \qquad (M\to+\infty)$$

なので，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は発散する．

(2) [○]← 正しければ○，正しくなければ×を入れる

理由：g が (a,b) で微分可能ならば，

$$g(a+h,b+k)=g(a,b)+g_x(a,b)h+g_y(a,b)k+\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

によって $\varepsilon(h,k)$ を定義すると $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$ である．とくに $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}=0$．したがって $\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(a+h,b+k)=g(a,b)$．

(3)
$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta\int_0^1 r^2\,dr=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$
したがって求める質量は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$kg.

学籍番号									氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D 何か言い残すことがありましたらお書きください．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2018 年度入学の方は，学籍番号のうち “18B” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．
- 原則として**途中退室は認めません**．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上におき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号									氏名	