第６回

光ファイバのモード特性
(波動方程式)

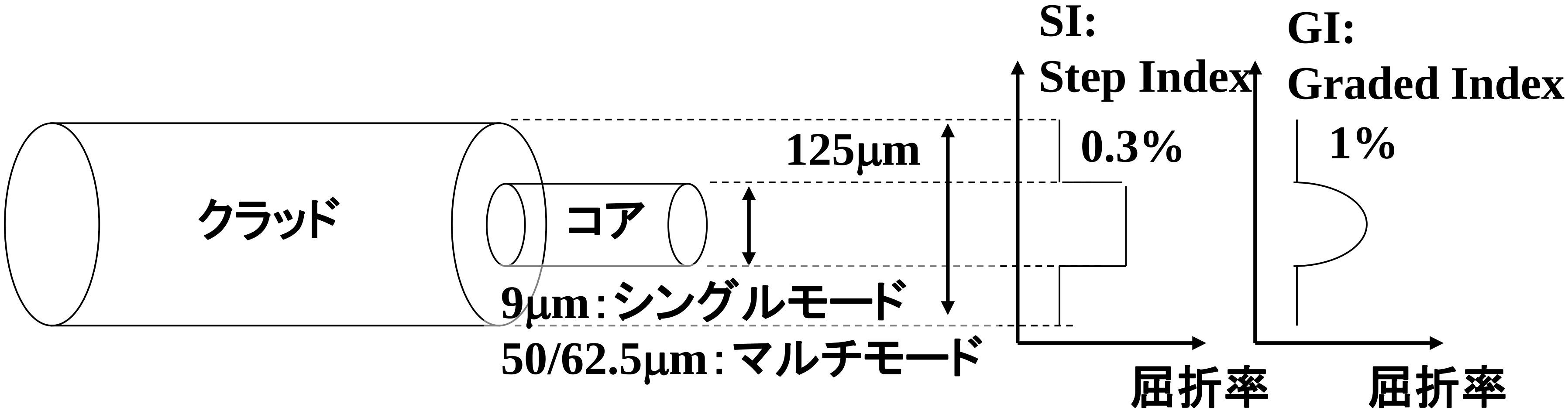
講義スケジュール(1)

植之原	日付	教科書	内容
第1回	11/30	OCW-i掲載資料(第1回)の精読と理解	光通信システム(基礎・長距離基幹系)
第2回	12/ 4	OCW-i掲載資料(第2回)の精読と理解	光通信システム (メトロ・アクセス・LAN・インターコネクション)
第3回	12/ 7	OCW-i掲載資料(第3回)の精読・PN符号の説明	光変調符号
第4回	12/11	OCW-i掲載資料(第4回)の精読・信号の数式・スペクトル表現	光変復調技術(強度変調・位相変調)
第5回	12/14	OCW-i掲載資料(第5回)の精読・機能ブロックの理解	光変復調技術 (デジタル・コヒーレント関連技術)
第6回	12/18	OCW-i掲載資料(第6回)の精読・波動方程式の解法	光ファイバのモード特性(波動方程式)
第7回	12/21	OCW-i掲載資料(第7回)の精読・モードおよび偏波状態の理解	光ファイバのモード特性(偏波)
第8回	12/ 25	OCW-i掲載資料(第8回)の精読・分散と帯域の関係式	ファイバの伝送特性(分散による伝送限界)

講義スケジュール(2)

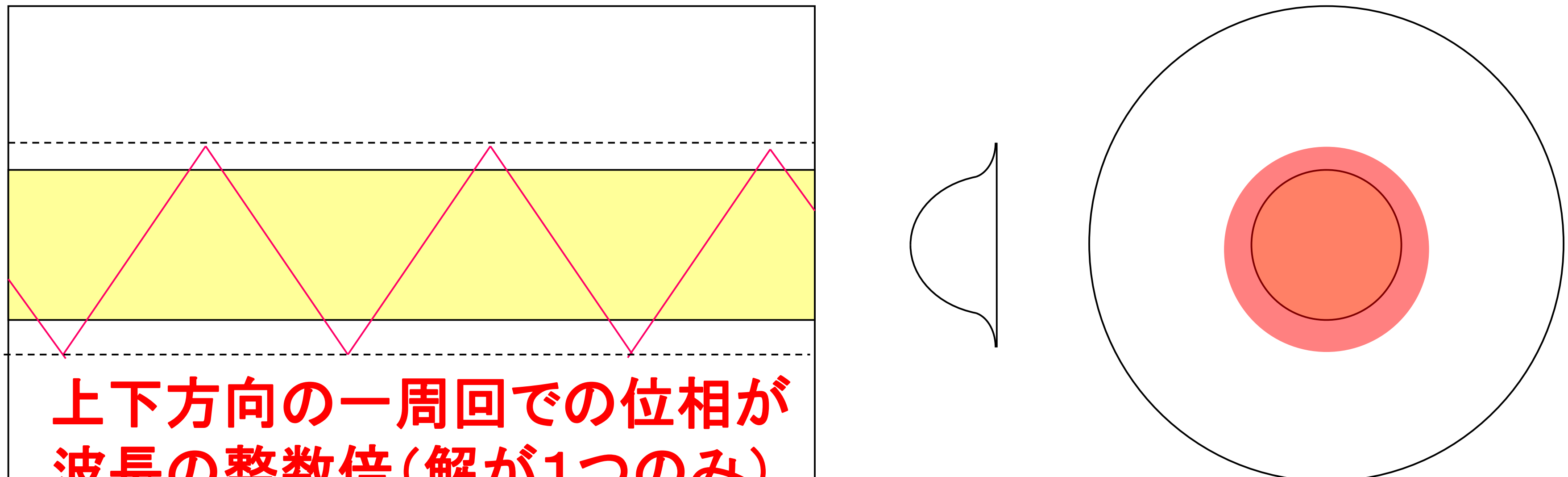
小山	日付	教科書	内容
第9回	1/11	OCW-i掲載資料(第9回)の精読・分散補償の概念の理解	ファイバの伝送特性(分散補償技術)
第10回	1/15	OCW-i掲載資料(第10回)の精読・動作原理の説明	光増幅器
第11回	1/18	OCW-i掲載資料(第11回)の精読・ビット誤り率の計算	ビット誤り率(強度変調・直接検波)
第12回	1/22	OCW-i掲載資料(第12回)の精読・ビット誤り率の相対比較	ビット誤り率 (コヒーレント、多値変調、光増幅)
第13回	1/25	OCW-i掲載資料(第13回)の精読・WDMの性能的課題	波長多重(WDM)伝送 (分散マネジメント技術)
第14回	1/29	OCW-i掲載資料(第14回)の精読・WDMの変調方式による性能差の理解	波長多重(WDM)伝送(変調技術)
第15回	2/ 1	OCW-i掲載資料(第15回)の精読・理解	光スイッチング技術・ 最新の光通信関連技術

光ファイバケーブル


クラッド
コア
125μm
9μm：シングルモード
50/62.5μm：マルチモード
SI:
Step Index
0.3%
屈折率
GI:
Graded Index
1%
屈折率

シングルモードファイバ・マルチモードファイバとは？（1）

シングルモードファイバ（コア径約9μm）

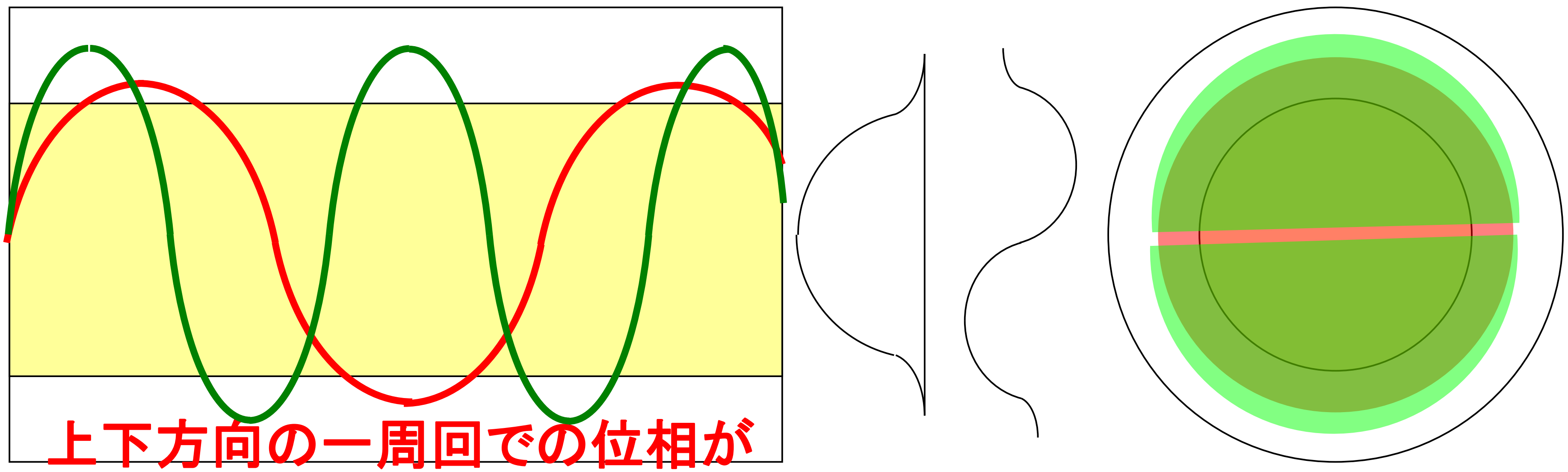


上下方向の一周回での位相が
波長の整数倍（解が1つのみ）

・一つの伝送モードのみ → 異なるモード間の時間の影響なし
・長距離伝送向き

シングルモードファイバ・マルチモードファイバとは？（2）

マルチモードファイバ（コア径50/62.5μm）



上下方向の一周回での位相が
波長の整数倍（解が複数）

- 複数の伝送モードが許される　→　異なるモード間の時間差
- 短距離／低コスト用途向き

波動方程式の導出

マクスウェルの方程式(1)

マクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (6.1) \\ \nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t} & (6.2) \\ \nabla \cdot D = 0 & (6.3) \\ \nabla \cdot B = 0 & (6.4) \end{cases}$$

仮定

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = \varepsilon_0 n_i^2 (i = 1,2) \quad (\ n_i \ \text{:屈折率}) \\ &\mu = \mu_0 \quad \text{(非磁性体)} \\ &\sigma = 0 \quad \text{(絶縁体}, J=0\text{)} \end{aligned}\right\} \quad (6.5)$$

電界と磁界の時間依存性

$$\left\{\begin{aligned} E &= E^0(x, y, z)e^{j\omega t} \\ H &= H^0(x, y, z)e^{j\omega t} \end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

マクスウェルの方程式(2)

式(6.5), (6.6)を式(6.1), (6.2)に代入

$$\nabla\times E^0=-j\omega\mu_0 H^0 \qquad (6.7)$$

$$\nabla\times H^0=j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 \qquad (6.8)$$

電界の式

式(6.7)の両辺に ▽× を作用させると、

$$\nabla\times\nabla\times E^0=-j\omega\mu_0\nabla\times H^0 \qquad (6.9)$$

左辺＝ $\nabla(\nabla\cdot E^0)-\nabla^2 E^0$

式(6.3)より $\nabla\cdot D=\nabla\cdot(\varepsilon E)=\varepsilon\nabla\cdot E+(\nabla\varepsilon)\cdot E=0$ だから、

$$\nabla\cdot E=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot E \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot E^0=-\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot E^0$$

（時間項削除）

マクスウェルの方程式(3)

$$\text{よって左辺} = -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^2}{n_i^2}\cdot E^0\right) - \nabla^2 E^0$$

式(6.9)の右辺に式(6.8)を代入すると、

$$\text{右辺} = -j\omega\mu_0 \cdot j\omega\varepsilon_0 n_i^2 E^0 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0$$

よって、

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0 = -\nabla\left(\frac{\nabla n_i^2}{n_i^2}\cdot E^0\right)}$$

(波動方程式) (6.10)

右辺は屈折率の空間依存性の項なので、屈折率の一様な媒質あるいは屈折率差が数%と小さい媒質については $\nabla n_i^2 = 0$ より

$$\boxed{\nabla^2 E^0 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 n_i^2 E^0 = 0}$$

(6.11)

マクスウェルの方程式(4)

磁界の式

電界の式の導出と同様に式(6.8)の両辺に　$\nabla\times$　を作用させると、

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{H}^0 = j\omega\varepsilon_0\nabla\times(n_i{}^2\boldsymbol{E}^0)$$

左辺＝ $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}^0)-\nabla^2\boldsymbol{H}^0 = \nabla\left(\dfrac{\nabla\cdot\boldsymbol{B}^0}{\mu_0}\right)-\nabla^2\boldsymbol{H}^0 = -\nabla^2\boldsymbol{H}^0$

（ $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ を使用）

右辺＝ $j\omega\varepsilon_0 n_i{}^2(\nabla\times\boldsymbol{E}^0)+\nabla n_i{}^2\times j\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}^0$　（ベクトル公式より）

$$=\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0+\frac{\nabla n_i{}^2}{n_i{}^2}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}^0)\cong\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0$$

よって、

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{H}^0+\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i{}^2\boldsymbol{H}^0=0} \qquad (6.12)$$

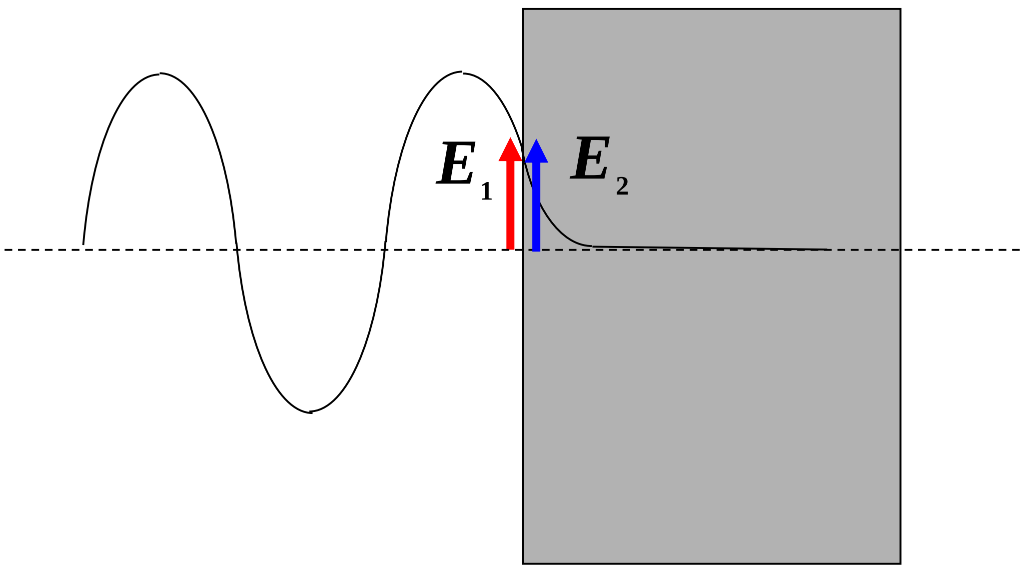
※時間依存の項は場所依存の解に$e^{j\omega t}$　を加えればよい。

解法(1):スラブ導波路

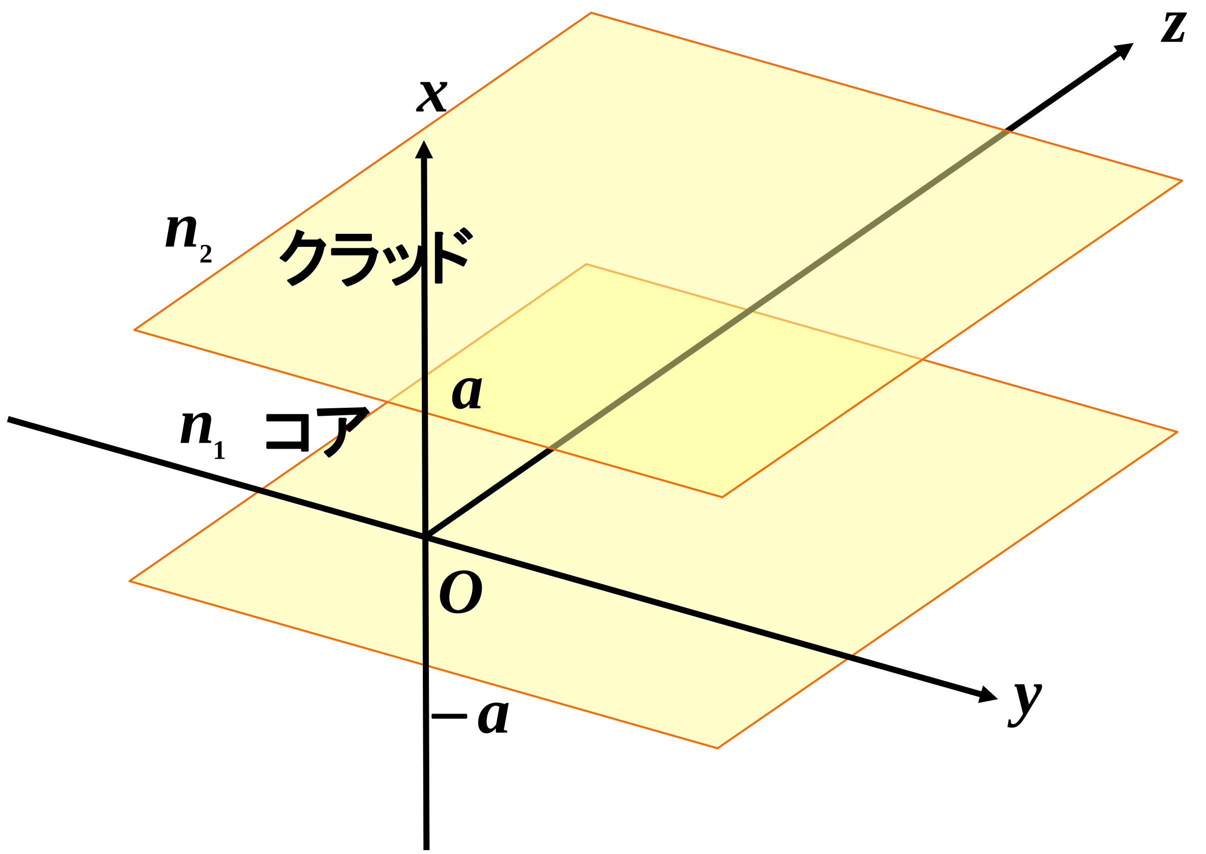
不連続部での境界条件

$\boldsymbol{n}$ を境界面に対する単位法線ベクトルとすると、

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:電界の接線成分が等しい} \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n} = 0 & \text{:磁界の接線成分が等しい} \end{cases}$$



（例題） ３層スラブ構造



スラブ構造:コアが y 方向、z方向に無限に広がる構造。
x方向にのみ境界が存在。

※コア幅: $2a$ として以下計算していることに注意。
core thickness = $2a$

TEモードとTMモード（１）

伝搬定数をβとおいて電磁界のz方向依存性を$e^{-j\beta z}$と仮定。

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$$

⇒ 最終解は以下の解に$e^{j(\omega t-\beta z)}$を補足したものとなる。

スラブ構造の条件

光はy方向に一様であり、 $\frac{\partial}{\partial y} = 0$

⇒ 式(6.7), (6.8)の再掲

$$\nabla \times E^0 = -j\omega\mu_0 H^0 \qquad (6.7)$$

$$\nabla \times H^0 = j\omega\varepsilon_0 {n_i}^2 E^0 \qquad (6.8)$$

TEモードとTMモード（2）

成分	式(6.7)	式(6.8)
x	$j\beta \boxed{E_y} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_x}$	$j\beta H_y = j\omega\mu_0 n_i^2 E_x$
y	$-j\beta E_x - \dfrac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}x} = -j\omega\mu_0 H_y$	$-j\beta \boxed{H_x} - \dfrac{\mathrm{d}\boxed{H_z}}{\mathrm{d}x} = j\omega\mu_0 n_i^2 \boxed{E_y}$
z	$\dfrac{\mathrm{d}\boxed{E_y}}{\mathrm{d}x} = -j\omega\mu_0 \boxed{H_z}$	$\dfrac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} = j\omega\mu_0 n_i^2 E_z$

E_y, H_x, H_zを有する解：$E(0, E_y, 0)$, $H(H_x, 0, H_z)$

TE（Transverse Electric）モード

E_x, E_z, H_yを有する解：$E(E_x, 0, E_z)$, $H(0, H_y, 0)$

TM（Transverse Magnetic）モード

TEモードの解（1）

式(6.11)に$E(0, E_y, 0)$ を代入して、

$$\left(\frac{d^2E_y}{dx^2} + \underbrace{\frac{d^2E_y}{dy^2}}_{=0} + \underbrace{\frac{d^2E_y}{dz^2}}\right) + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i^{\,2} E_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = (-j\beta)^2 = -\beta^2$$

$$\frac{d^2E_y}{dx^2} + (\omega^2\varepsilon_0\mu_0 n_i^{\,2} - \beta^2)E_y = 0 \qquad \textbf{(6.13)}$$

更に $k_0^{\,2} = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ とおいてコア内($n=n_1$)とクラッド内($n= n_2$)について表現すると、

$$\begin{cases} \dfrac{d^2E_y}{dx^2} + \underbrace{(k_0^{\,2} n_1^{\,2} - \beta^2)}_{>0} E_y = 0 & \text{（コア内）} \quad \textbf{(6.14)} \\ \dfrac{d^2E_y}{dx^2} - \underbrace{(\beta^2 - k_0^{\,2} n_2^{\,2})}_{>0} E_y = 0 & \text{（クラッド内）} \quad \textbf{(6.15)} \end{cases}$$

TEモードの解(2)

式(6.14), (6.15)に電界の接線成分の境界条件を適用する。

$$E_y(x \to \pm a_{+0}) = E_y(x \to \pm a_{-0}) \qquad (6.16)$$

ただし複合同順、a_{+0}, a_{-0}はそれぞれコア側、クラッド側から近づけることを意味する。

磁界の接線成分に対しても同様にして、

$$H_z(x \to \pm a_{+0}) = H_z(x \to \pm a_{-0}) \qquad (6.17)$$

$\dfrac{\partial E_y}{\partial x}$ の連続の式

クラッド内では

$$\left.\begin{aligned} E(x \to \pm\infty) &= 0 \\ H(x \to \pm\infty) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

の条件が適用される。

TEモードの解(3)

電界について

導波モードは $k_0 n_2 \le \beta \le k_0 n_1$ を満足する。
式(6.14)、(6.15)について以下の変数をおく。

$$\begin{cases} \kappa^2 = k_0{}^2 n_1{}^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 = \beta^2 - k_0{}^2 n_2{}^2 \end{cases}$$

式(6.14)、(6.15)は以下のように変形される。 (Δ: 比屈折率差)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} + \kappa^2 E_y = 0 & \text{(コア内)} \quad (6.19) \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} - \gamma^2 E_y = 0 & \text{(クラッド内)} \quad (6.20) \end{cases}$$

TEモードの解（4）

式(6.19)、(6.20)の一般解は以下の式で与えられる。

$$\begin{cases} E_y = Ae^{-j\kappa x} + Be^{j\kappa x} & \text{（コア内）} \quad (6.21) \quad \text{Oscillation} \\ E_y = Ce^{-\gamma x} + De^{\gamma x} & \text{（クラッド内）} \quad (6.22) \quad \text{Attenuation} \end{cases}$$

まず式(6.18)の条件より、

$$\begin{cases} D = 0(x > a) & (6.23) \\ C = 0(x < -a) & (6.24) \end{cases}$$

また式(6.16)より、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a} = Ce^{-\gamma a} & (x \to a) \quad (6.25) \\ Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a} = De^{-\gamma a} & (x \to -a) \quad (6.26) \end{cases}$$

TEモードの解（5）

次に $x = \pm a$ において磁界の接線成分H_zが連続である条件(6.17)を用いる。

$$H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \cdot \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}$$ **だから**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -j\kappa A e^{-j\kappa x} + j\kappa B e^{j\kappa x} & \textbf{(6.27)} \\ \dfrac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\gamma C e^{-\gamma x} + \gamma D e^{\gamma x} & \textbf{(6.28)} \end{cases}$$

より、

$$\begin{cases} -j\kappa A e^{-j\kappa a} + j\kappa B e^{j\kappa a} = -\gamma C e^{-\gamma a} & (x = a) \\ -j\kappa A e^{j\kappa a} + j\kappa B e^{-j\kappa a} = \gamma D e^{-\gamma a} & (x = -a) \end{cases}$$

TEモードの解（6）

変形して、

$$\begin{cases} Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a} = -\dfrac{j\gamma C}{\kappa} e^{-\gamma a} \qquad (x = a) & \textbf{(6.29)} \\ Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a} = \dfrac{j\gamma D}{\kappa} e^{-\gamma a} \qquad (x = -a) & \textbf{(6.30)} \end{cases}$$

***A*と*B*の関係を求めるため、*C*および*D*を消去する。**

(6.29)÷(6.25)より、

$$\frac{Ae^{-j\kappa a} - Be^{j\kappa a}}{Ae^{-j\kappa a} + Be^{j\kappa a}} = -\frac{j\gamma}{\kappa} \qquad \textbf{(6.31)}$$

(6.30)÷(6.26)より、

$$\frac{Ae^{j\kappa a} - Be^{-j\kappa a}}{Ae^{j\kappa a} + Be^{-j\kappa a}} = \frac{j\gamma}{\kappa} \qquad \textbf{(6.32)}$$

さらに(6.31)÷(6.32)を計算して右辺の変数を消去

TEモードの解(7)

$$\frac{(Ae^{-j\kappa a}-Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}+Be^{-j\kappa a})}{(Ae^{-j\kappa a}+Be^{j\kappa a})(Ae^{j\kappa a}-Be^{-j\kappa a})}=-1$$

変形して、$A^2=B^2$を得る。

① $A=B$の場合

式(6.25)より $$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=Ce^{-\gamma a}$$

$$2A\cos(\kappa a)=Ce^{-\gamma a} \qquad \textbf{(6.33)}$$

式(6.29)より $$A\left(e^{-j\kappa a}-e^{j\kappa a}\right)=-\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a}$$

$$2A\sin(\kappa a)=\frac{\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad \textbf{(6.34)}$$

(6.34)÷(6.33)より、 $$\boxed{\tan(\kappa a)=\frac{\gamma}{\kappa}=\frac{\gamma a}{\kappa a}} \qquad \textbf{(6.35)}$$

TEモードの偶数次モード

TEモードの解(8)

① $A=-B$の場合

式(6.25)より

$$A(e^{j\kappa a}-e^{-j\kappa a})=-Ce^{-\gamma a}$$

$$2A\sin(\kappa a)=jCe^{-\gamma a} \qquad \mathbf{(6.36)}$$

式(6.29)より

$$A(e^{j\kappa a}+e^{-j\kappa a})=jCe^{-\gamma a}$$

$$2A\cos(\kappa a)=-\frac{j\gamma C}{\kappa}e^{-\gamma a} \qquad \mathbf{(6.37)}$$

(6.37)÷(6.36)より、 $\boxed{\cot(\kappa a)=-\frac{\gamma}{\kappa}=-\frac{\gamma a}{\kappa a}}$ **(6.38)**

TEモードの奇数次モード

(6.35)と(6.38)を一つの式にまとめると、

$$\boxed{\tan\left(\kappa a+\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{\gamma a}{\kappa a} \qquad (n=0,1,2,\cdots)} \qquad \mathbf{(6.39)}$$

***n*: 横モードの次数**
order of transverse (lateral) mode

対称３層スラブ導波路のモード電磁界式

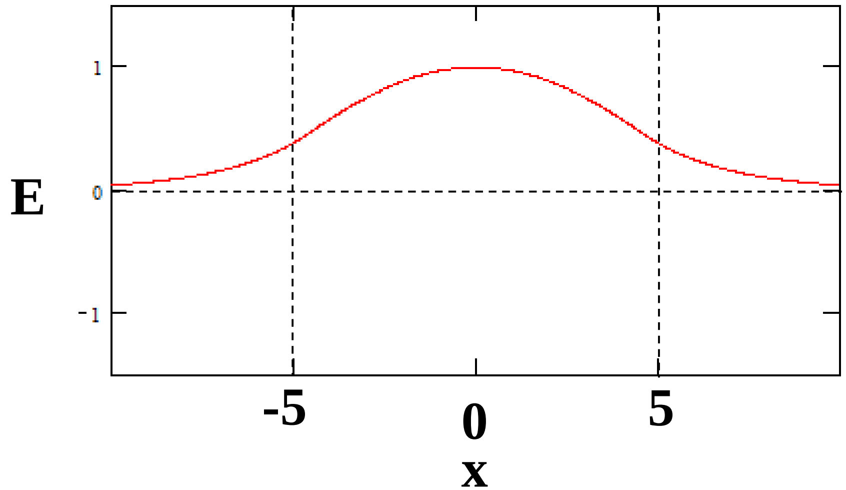
モード	モード電磁界式		固有値方程式
	$\lvert x \rvert \leq a$	$\lvert x \rvert > a$	
TE偶数次	$E_y = A_e \cos(\kappa x)$	$E_y = A_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TE奇数次	$E_y = A_o \sin(\kappa x)$	$E_y = \dfrac{x}{\lvert x \rvert} A_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TM偶数次	$H_y = B_e \cos(\kappa x)$	$H_y = B_e \cos(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\tan(\kappa a) = \boxed{(\dfrac{n_1}{n_2})^2} \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$
TM奇数次	$H_y = B_o \sin(\kappa x)$	$H_y = \dfrac{x}{\lvert x \rvert} B_o \sin(\kappa a) \cdot e^{-\gamma(\lvert x \rvert - a)}$	$\cot(\kappa a) = -\boxed{(\dfrac{n_1}{n_2})^2} \dfrac{\gamma a}{\kappa a}$

複屈折性
birefringence

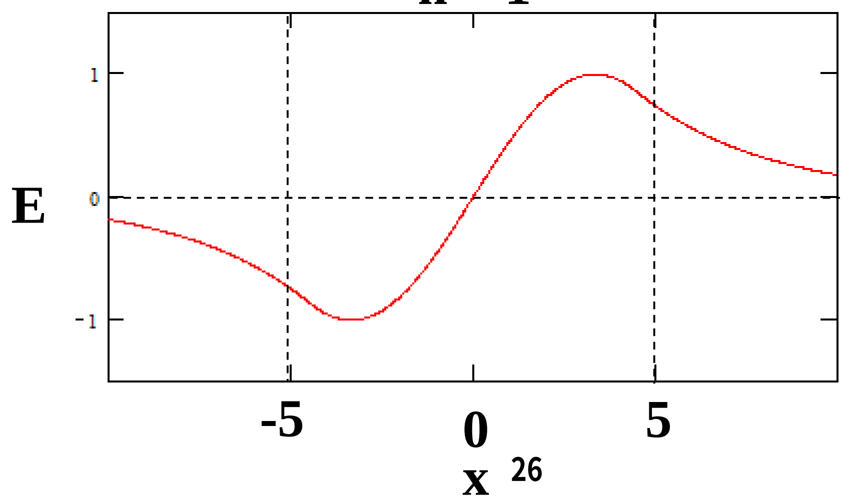
スラブ導波路の電界分布(1)

$n_1 = 1.485$, n2 = 1.48, $\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = 0.3\%$, 2d = 10.0μm

n = 0 (基本モード)



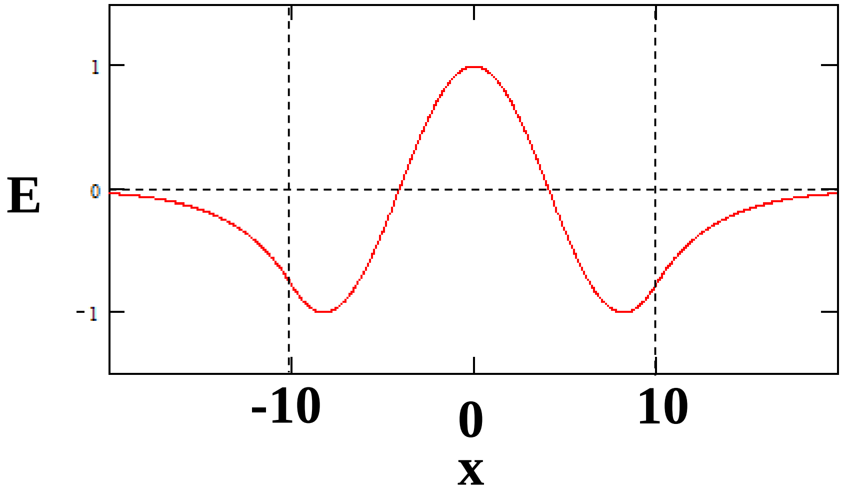
n = 1



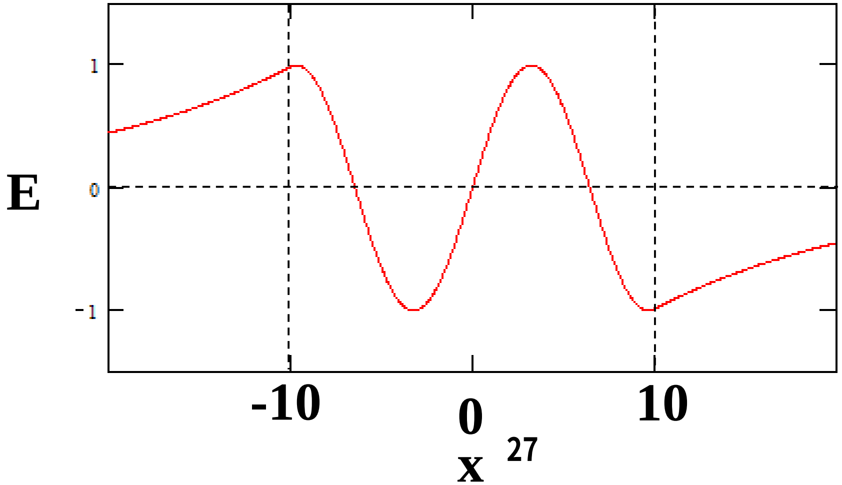
スラブ導波路の電界分布(2)

n_1 = 1.49, n2 = 1.48, Δ = 0.7%, 2d = 20.0μm

n = 2



n = 3



固有値（特性）方程式（1）

式(6.39)を規格化した変数で表現する。

⇒ 構造パラメータの変化に対する伝搬定数の変化の特性を一般化できる。

V：Vパラメータ（規格化周波数）

$$\left\{\begin{aligned}\kappa^2 &= k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 &= \beta^2 - k_0^2 n_2^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2}$$

半径(V/a)、中心Oのκ-γ座標の円

ただし $$\boxed{V = k_0 n_1 a \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{n_1^2 - n_2^2}{2 n_1^2}} = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta}}$$

Δ：比屈折率差

固有値方程式(2)

規格化伝搬定数*b*

以下の式で規格化伝搬定数*b*を定義する。

$$\boxed{b = \frac{(\beta / k_0)^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}}$$

$$b = \frac{(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) a^2}{(k_0 a)^2 (n_1^2 - n_2^2)} = \frac{(\gamma a)^2}{(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2} = \left(\frac{\gamma a}{V}\right)^2 \quad (6.40)$$

よって、 $\gamma a = V\sqrt{b}$ (6.41)

固有値方程式(3)

式(6.40)を変形して、

$$\kappa a = \sqrt{(\frac{1}{b}-1)(\gamma a)^2} = V\sqrt{1-b} \qquad (6.42)$$

(6.41), (6.42)を(6.39)に代入して変形し、以下の式を得る。

$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}\{\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{1-b}}+\frac{n\pi}{2}\} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (6.43)$$

TEモードの固有値方程式

TMモードについても同様にして以下の式を得ることができる。

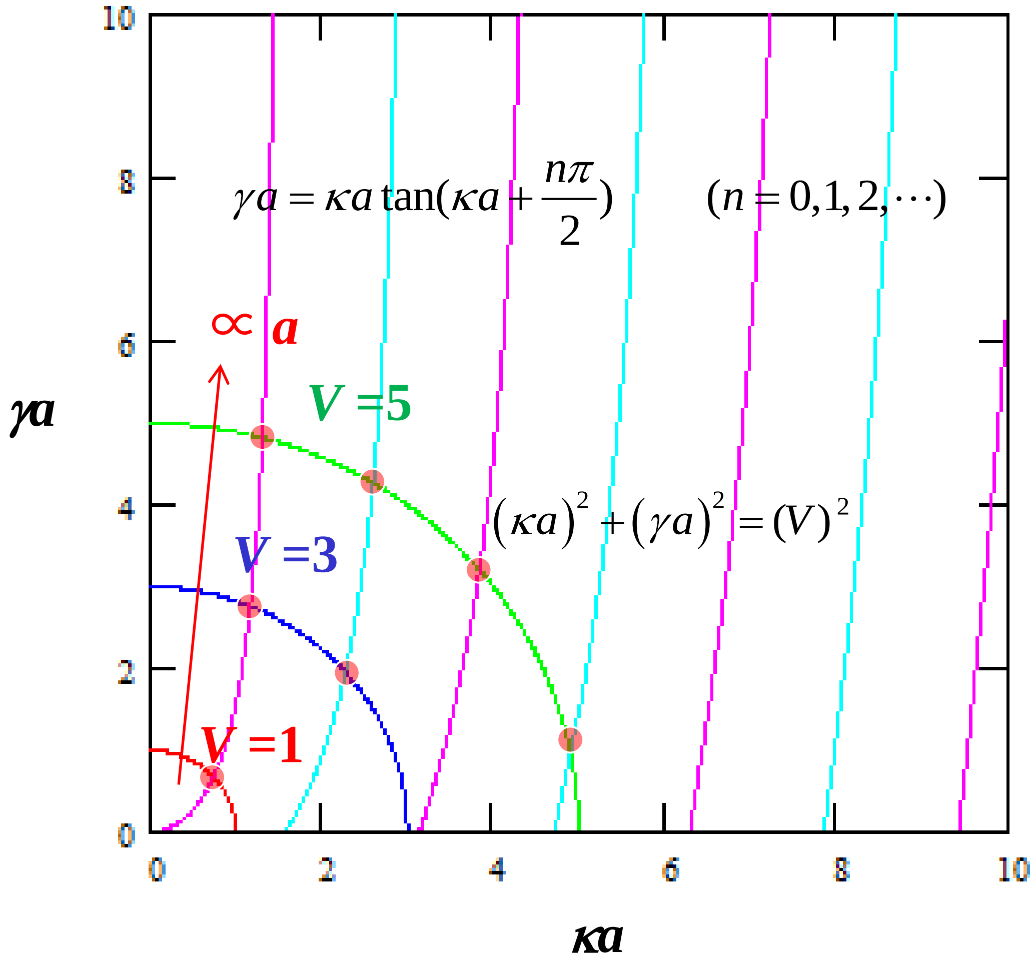
$$V = \frac{1}{\sqrt{1-b}}[\tan^{-1}\{(\frac{n_1}{n_2})^2\sqrt{\frac{b}{1-b}}\}+\frac{n\pi}{2}] \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (6.44)$$

TMモードの固有値方程式

固有値方程式の解の図示

$$\gamma a = \kappa a \tan(\kappa a + \frac{n\pi}{2}) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

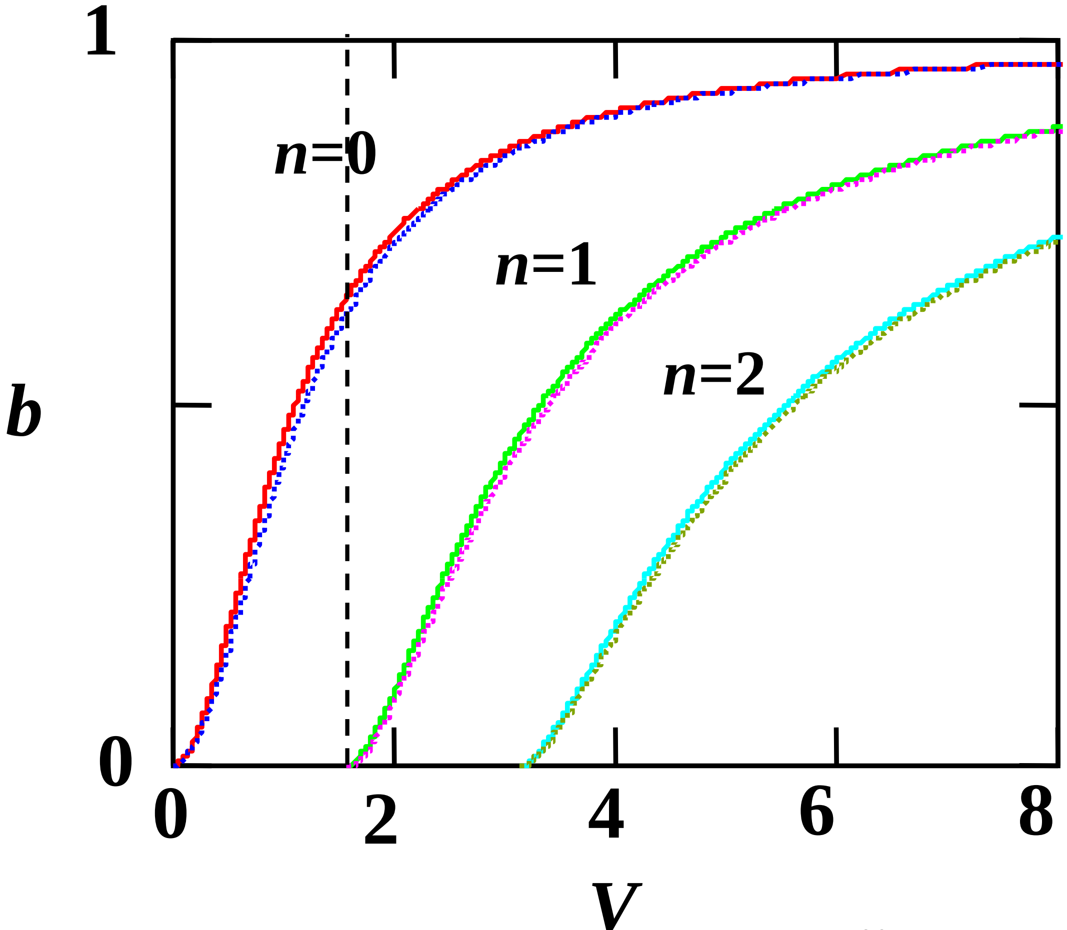
$$(\kappa a)^2 + (\gamma a)^2 = (V)^2$$ の交点が解



固有値方程式の数値解析結果

n_1=1.63, n_2=1.45, Δ=0.104の条件の解析結果

実線：TE，点線：TM



●解析方法：
式(6.43), (6.44)を*b*を
パラメータに*V*を求め、
*b*軸-*V*軸を入れ替える。

●ある構造が与えられると
*V*が決まる
→ 横モードごとの*b*が求まる

単一(シングル)モード条件

n=1, b=0のときのVを求めると、固有値方程式より、

$$V = \frac{\pi}{2}$$

解析のグラフより、$V < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲ではn=0の解しかないことがわかる。

⇒ 単一(シングル)モード条件

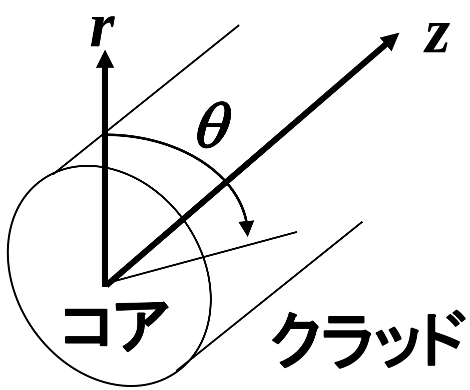
光ファイバ・光導波路・半導体レーザなど各種デバイスの設計で必須

光ファイバのモード解析

光ファイバのモード（1）

光ファイバの波動方程式

界分布のz方向依存性をexp(-jβz)と仮定して、円筒座標系で以下の式を得る。

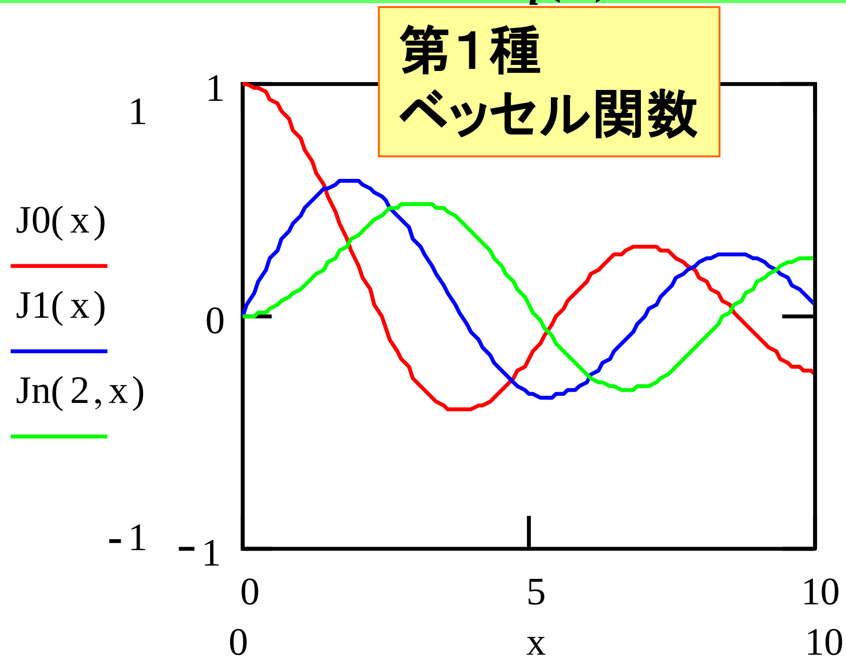


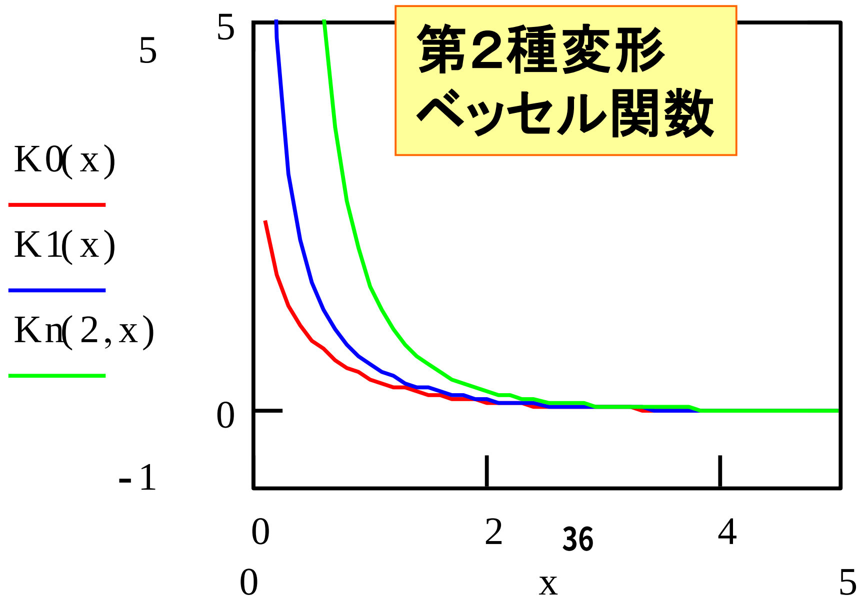
$$
\text{屈折率分布}\, n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 & (r \le a) \\ n_2^2 = n_1^2(1-2\Delta) & (r > a) \end{cases} \quad (6.45)
$$

$$
\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial H_z}{\partial \theta} + (k_0^2 n^2 - \beta^2) H_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.46)
$$

本微分方程式はベッセルの微分方程式であり、基本解は
第一種変形ベッセル関数と第二種変形ベッセル関数である

光ファイバのモード（２）
第１種ベッセル関数$J_l(x)$, 第２種変形ベッセル関数$K_l(x)$





光ファイバのモード(3)

式(6.45)を(6.46)に代入

変数分離法により角度θ依存性は三角関数

半径r依存性はコア内振動解:第1種ベッセル関数$J_\nu(x)$

クラッド内は減衰解:

第2種変形ベッセル関数$K_\nu(x)$

コア内 $(r \le a)$

$$Ez = A_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \phi_l) \quad (6.47)$$

$$Hz = B_l J_l(\kappa r)\cos(l\theta + \psi_l) \quad (6.48)$$

クラッド内 $(r > a)$

$$Ez = A_l \frac{J_l(\kappa a)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \phi_l) \quad (6.49)$$

$$Hz = B_l \frac{J_l(\kappa r)}{K_l(\gamma a)} K_l(\gamma r)\cos(l\theta + \psi_l) \quad (6.50)$$

Ez, Hzがそれぞれ$r=a$において連続となるように係数を考慮

l : 角度θ方向のモード番号

光ファイバのモード（4）

θ方向（接線成分）が$r=a$で連続となる条件

$$E_\theta(r \to a+0) = E_\theta(r \to a-0) \qquad (6.51)$$

$$H_\theta(r \to a+0) = H_\theta(r \to a-0) \qquad (6.52)$$

ここで式(3.7), (3.8)の円筒座標系の表現から以下の式を得る。

$$E_\theta = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2}\left(\beta \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \theta} - \omega\mu \frac{\partial Hz}{\partial r}\right) \qquad (6.53)$$

$$H_\theta = \frac{-j}{\omega^2 \varepsilon \mu - \beta^2}\left(\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \theta}\right) \qquad (6.54)$$

式(6.51), (6.52)を満たす条件から得られる2元連立同次方程式が恒等的に0でない解を持つことから、次式を得る。

光ファイバのモード（５）

$$\frac{k_0^2\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]\left[n_1^2\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+n_2^2\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]}{l^2\beta^2\left(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sin(l\theta+\phi_l)\sin(l\theta+\psi_l)}{\cos(l\theta+\phi_l)\cos(l\theta+\psi_l)}$$

$$=\frac{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)-\cos(\phi_l-\psi_l)}{\cos(2l\theta+\phi_l+\psi_l)+\cos(\phi_l-\psi_l)} \quad (6.55)$$

式(6.55)は$r=a$の至るところで成立しなければいけないので、θに無依存。

$\cos(\phi_l-\psi_l)=0$ ならば右辺=1

$\therefore \phi_l-\psi_l=\pm\dfrac{\pi}{2}$ ⇒ E_zとH_zの角度依存性はπ/2ずれている＝直交

光ファイバのモード（６）

式(6.55)は次式となる。

$$
\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)}+(1-2\Delta)\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right]
$$

$$
=\left(\frac{l\beta}{k_0 n_1}\right)^2\left(\frac{1}{(\kappa a)^2}+\frac{1}{(\gamma a)^2}\right) \qquad (6.56)
$$

階段屈折率円筒光ファイバの固有値方程式

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（１）

式(6.56)において

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \cong \frac{n_1 - n_2}{n_1} << 1$$

が成り立つ場合には $\beta \cong k_0 n_1$ と近似して（弱導波近似）、

$$\left[\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)}\right] = \chi l\left(\frac{1}{(\kappa a)^2} + \frac{1}{(\gamma a)^2}\right) \qquad (6.57)$$

（ただしχ=+1または-1）

ここで以下のベッセル関数の公式を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{J'_l(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} &= \frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{l}{(\kappa a)^2} = -\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{l}{(\kappa a)^2} \\
\frac{K'_l(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} &= -\frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} - \frac{l}{(\gamma a)^2} = -\frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} + \frac{l}{(\gamma a)^2}
\end{aligned}\right\} \quad (6.58)$$

弱導波近似（Weakly-guiding Approximation）（２）

χ= -1の場合（HEモード）

$$\frac{J_{l-1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} - \frac{K_{l-1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad \textbf{(6.59)}$$

χ= +1の場合（EHモード）

$$\frac{J_{l+1}(\kappa a)}{\kappa a J_l(\kappa a)} + \frac{K_{l+1}(\gamma a)}{\gamma a K_l(\gamma a)} = 0 \qquad \textbf{(6.60)}$$

光ファイバのモードの分類（1）

光ファイバの一般解は6つの電磁界（*Er, Eθ, Ez, Hr, Hθ, Hz*）をすべて持ったモードである。

⇨ ハイブリッドモード

① HEモード

χ= -1で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l - 1$と振ると、式(6.59)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \qquad (6.61)$$

光ファイバのモードの分類(2)

ただし

$$
\begin{cases}
V = k_0 n_1 a \sqrt{2\Delta} & \text{(Vパラメータ or 規格化周波数)} \\
\Delta = \dfrac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \dfrac{n_1 - n_2}{n_1} & \text{(比屈折率差)} \\
b = \dfrac{(\frac{\beta}{k_0})^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} & \text{(規格化伝搬定数)}
\end{cases}
$$

解の固有値bを値の大きいものから順にm = 1, 2, 3,....と振り、
HE_{lm}モードと呼ぶ。

l : 角度θ方向のモード番号
ν: 角度θ方向の節の数の半分
m : 光強度分布が半径方向でとる極大値の数

光ファイバのモードの分類（３）

② TEモード、TMモード

l = 0の場合（ファイバの回転方向に一様な界分布）、

$$\boxed{\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}}} \quad (6.62)$$

式(6.47)～(6.50)において$\phi_l = \dfrac{\pi}{2}$ とすると$E_z = 0$ ⇨ TEモード

$\phi_l = 0$ とすると$H_z = 0$ ⇨ TMモード

光ファイバのモードの分類（4）

③ EHモード

$\chi = +1$で$l \geq 1$の場合、モード番号を新たに$\nu = l + 1$と振ると、式(6.60)は以下に変形できる。

$$\frac{J_{\nu-1}(\sqrt{1-b}V)}{J_{\nu}(\sqrt{1-b}V)} \cdot \frac{K_{\nu}(\sqrt{b}V)}{K_{\nu-1}(\sqrt{b}V)} = -\sqrt{\frac{b}{1-b}} \qquad (6.63)$$

LPモード

式(6.61)～(6.63)はすべて同じ形である。
方位角θ方向のモード番号*l*を変換して

$$\nu = \begin{cases} l-1: HE_{l,m}\text{モード} \\ l+1: TE_{0,m}, TM_{0,m}, EH_{l,m}\text{モード} \end{cases}$$

とおくと、同じνを持つ$HE_{\nu+1,m}$モードと$EH_{\nu-1,m}$モードは伝搬定数が同じである。

⇨ 縮退

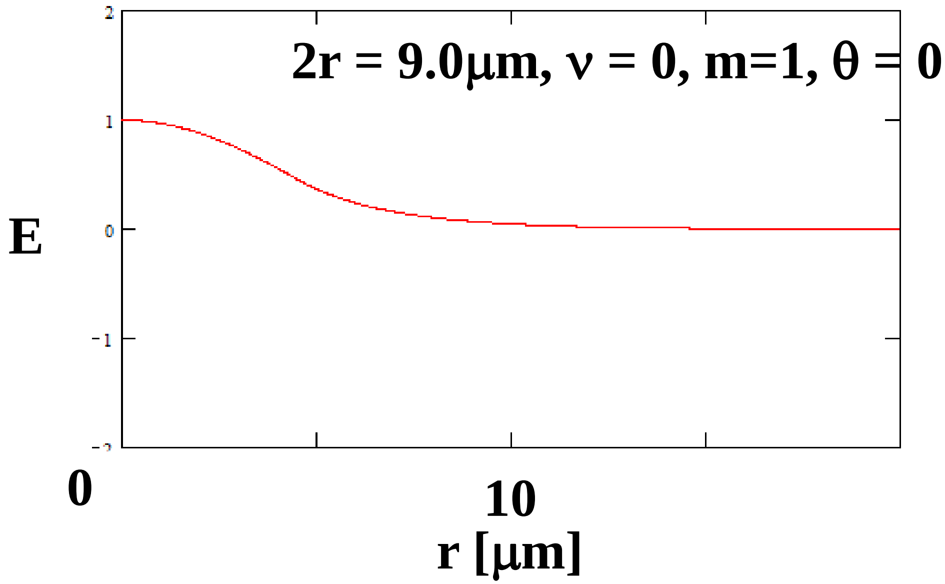
※弱導波路近似により導出されるものなので、厳密解では
若干差あり
Little difference of propagation constant occurs in the actual modes

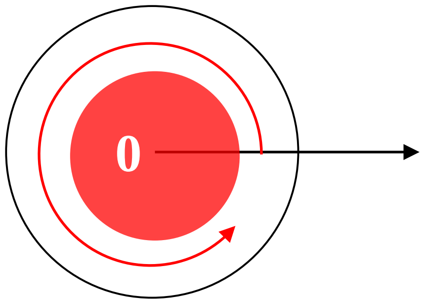
互いに縮退を起こしている固有関数の線形結合から作った固有モードの
組み合わせにより、直線偏光したモードを作ることができる。

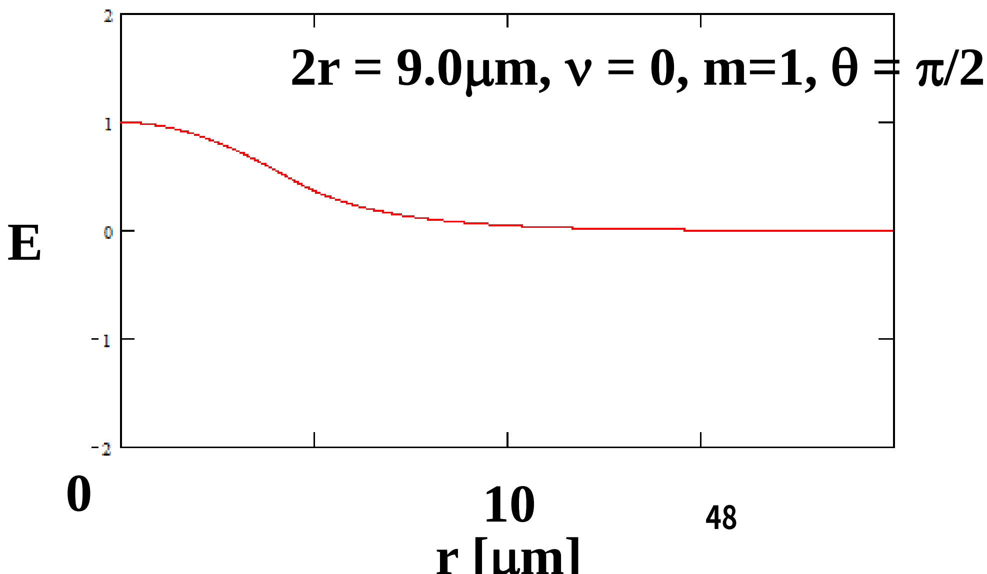
⇨ LP（Linearly Polarized）モード：$LP_{\nu,m}$

光ファイバの電界分布(1)

LP01モード

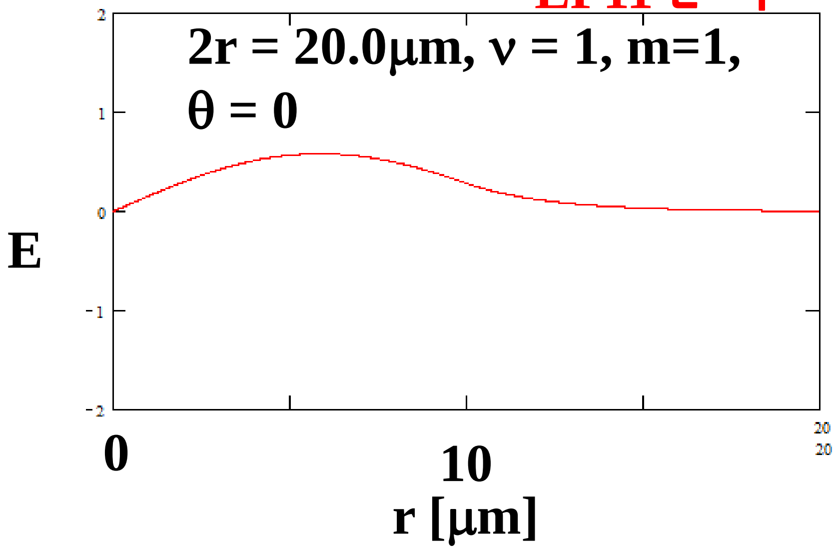


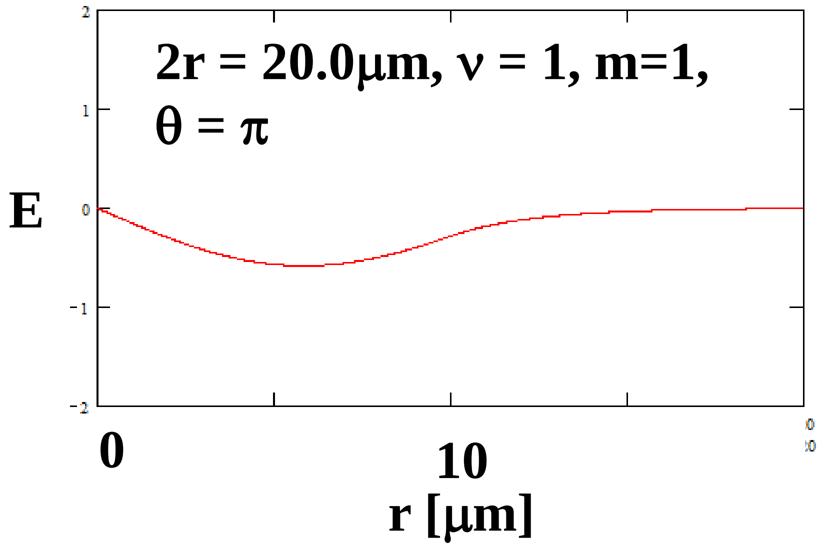


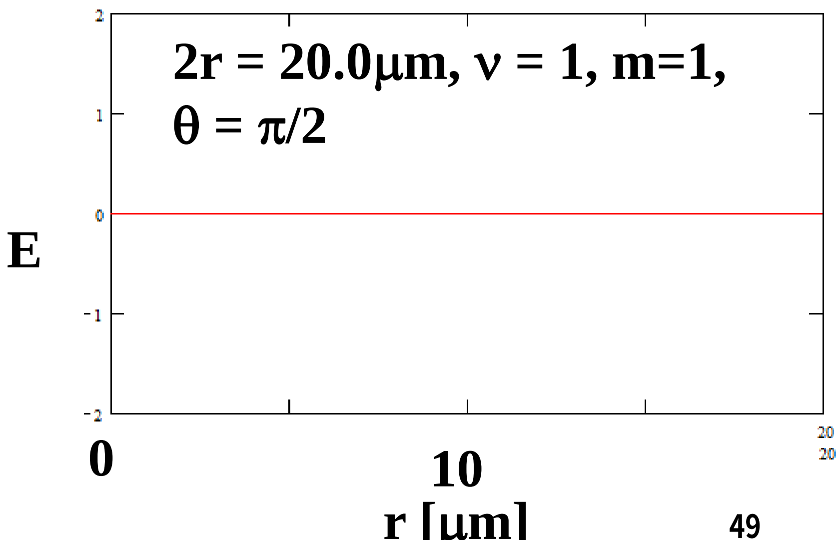


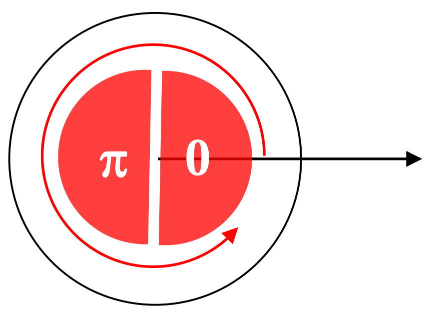
光ファイバの電界分布(2)

LP11モード



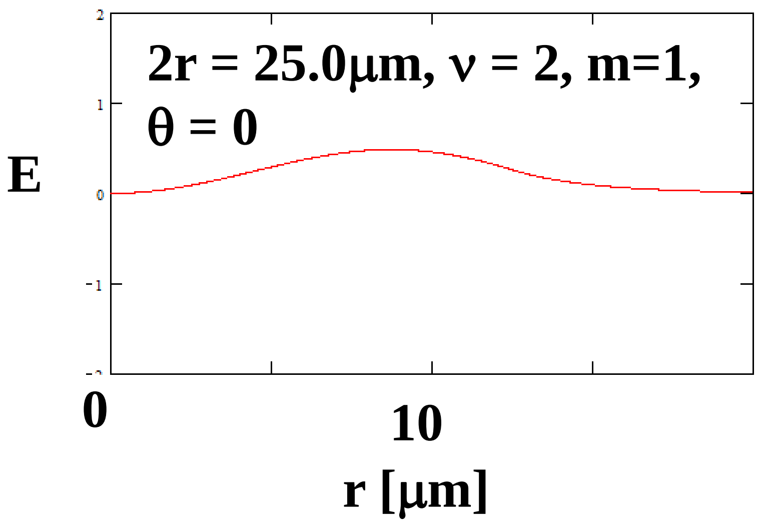


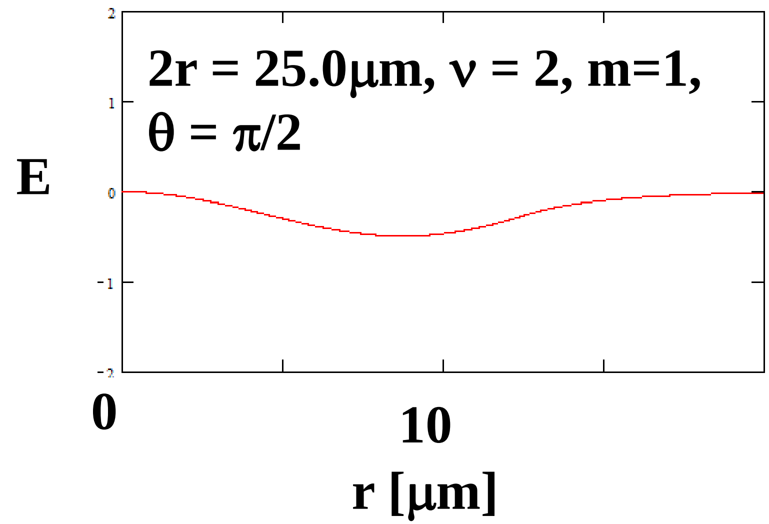


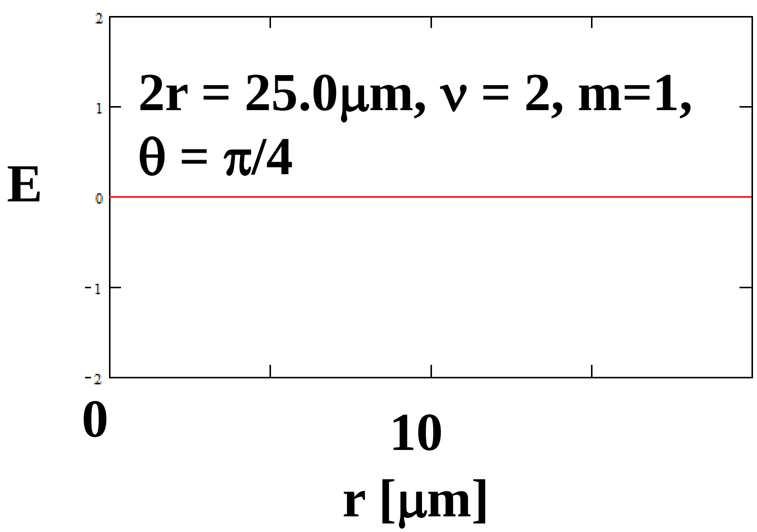


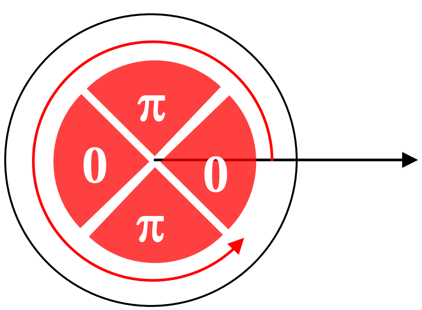
光ファイバの電界分布(3)

LP21モード









光ファイバの分散曲線(1)

基本モードν=0について考える。式(6.61)にν=1を代入して

$$\frac{J_0(\sqrt{1-b}V)}{J_1(\sqrt{1-b}V)}\cdot\frac{K_1(\sqrt{b}V)}{K_0(\sqrt{b}V)}=-\sqrt{\frac{b}{1-b}}$$

カットオフ条件は、b=0とおいて$J_0(V)=0$の第一番目の解なので、

$$\boxed{V \le 2.405}$$

$V=k_0 n_1 a\sqrt{2\Delta}$ より

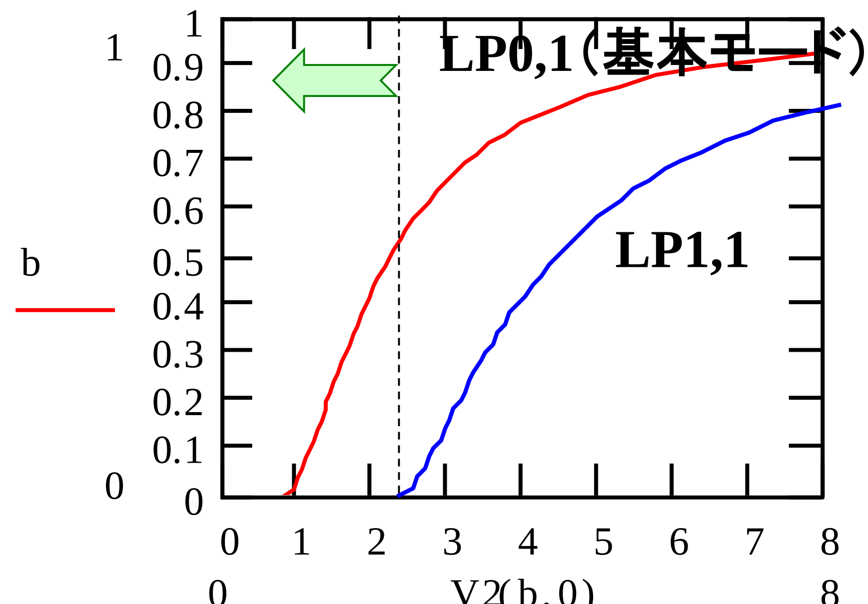
$$a<\frac{2.405}{k_0 n_1\sqrt{2\Delta}}$$

$\Delta=0.003,\ \ n_1=1.46$のとき、

$$a<\frac{2.405\times1.55}{2\pi\times1.46\times\sqrt{2\times0.003}}=5.25\mu m$$

(直径10.5μm以下)

単一モード条件



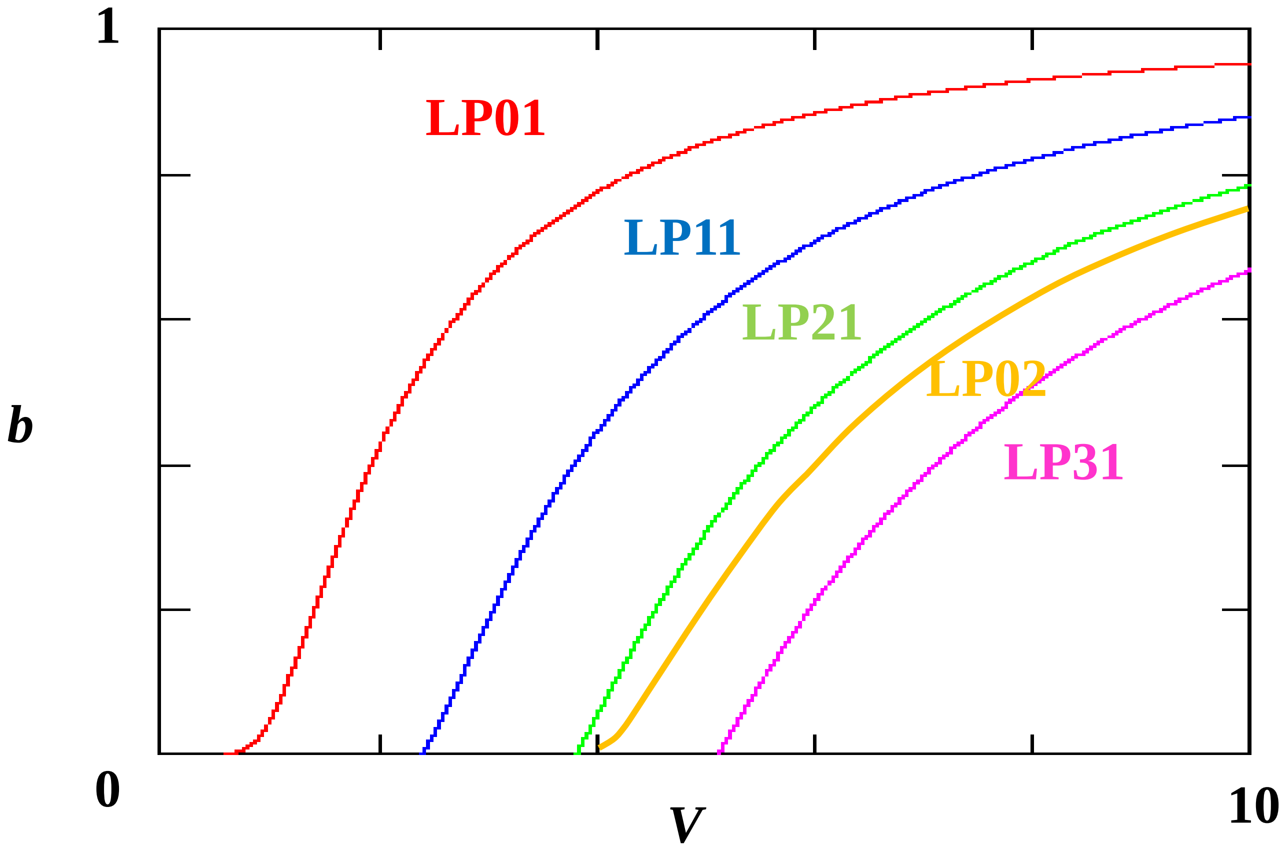
LPモードと厳密モードの対応・カットオフ条件

LPモードと厳密モードの対応

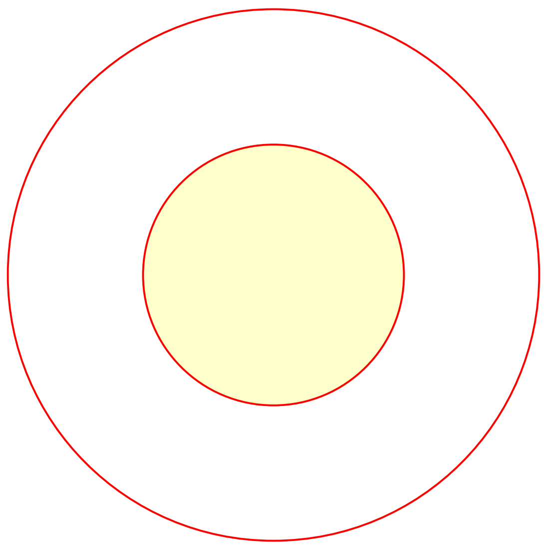
LPモード近似	厳密モード	カットオフV値
$LP_{0,m}$	$HE_{1,m}$	V=0 (m=1) $J_1(V)=0$のm-1番目の根（m>2） ２偏波モードを合わせた2重に縮退
$LP_{1,m}$	$HE_{2,m}$ $TE_{0,m}$ $TM_{0,m}$	$J_0(V)=0$のm番目の根 （例）V=2.4048 (m=1)：$LP_{1,1}$ ２偏波モードを合わせた4重に縮退 （TE、TMは軸対称のため偏波縮退なし）
$LP_{\nu,m}$ （$\nu \geq 2$ ）	$HE_{\nu+1,m}$ $EH_{\nu-1,m}$	$J_{\nu-1}(V)=0$のm番目の根 ２偏波モードを合わせた4重に縮退

光ファイバの分散曲線（2）

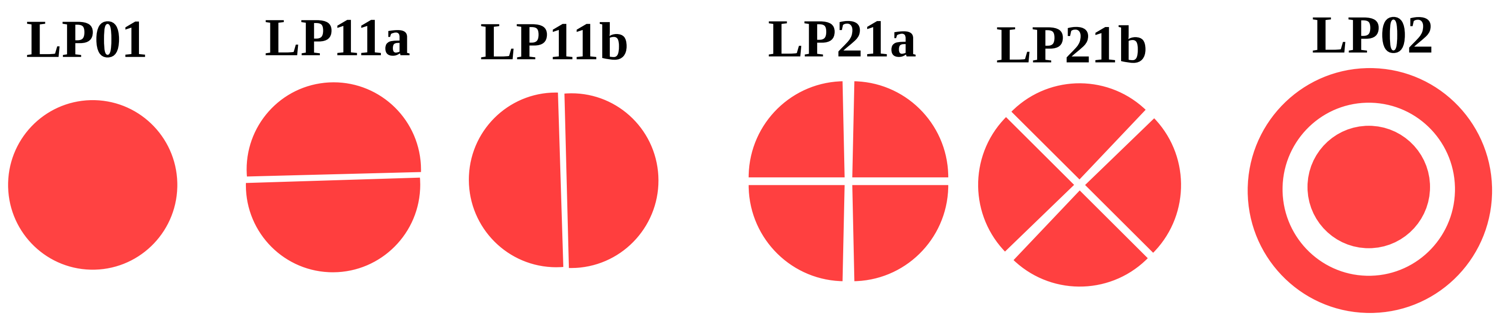
（参考例）岡本勝就著『光導波路の基礎』pp.66　図3.4



伝送路の新時代：マルチ・モードファイバ



少モードファイバ（Few mode Fiber, FMF）：
コア径がシングルモードファイバとマルチモードファイバの中間で、数モード（10前後）を持つもの



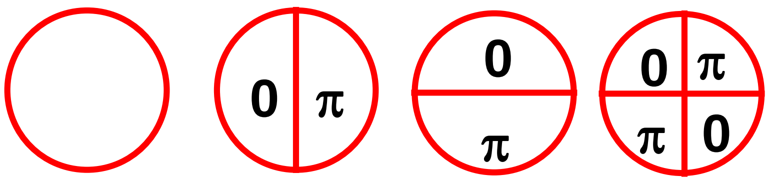
さらに各モードに偏波の互いに直交な成分が存在

伝送路の新時代：マルチ・モードファイバ

高次モードの生成・多重・分離方式

生成

① 位相板



LP01　LP11e　LP11o　LP21o

② 長周期ファイバ・グレーティング

③ 方向性結合器

多重・分離

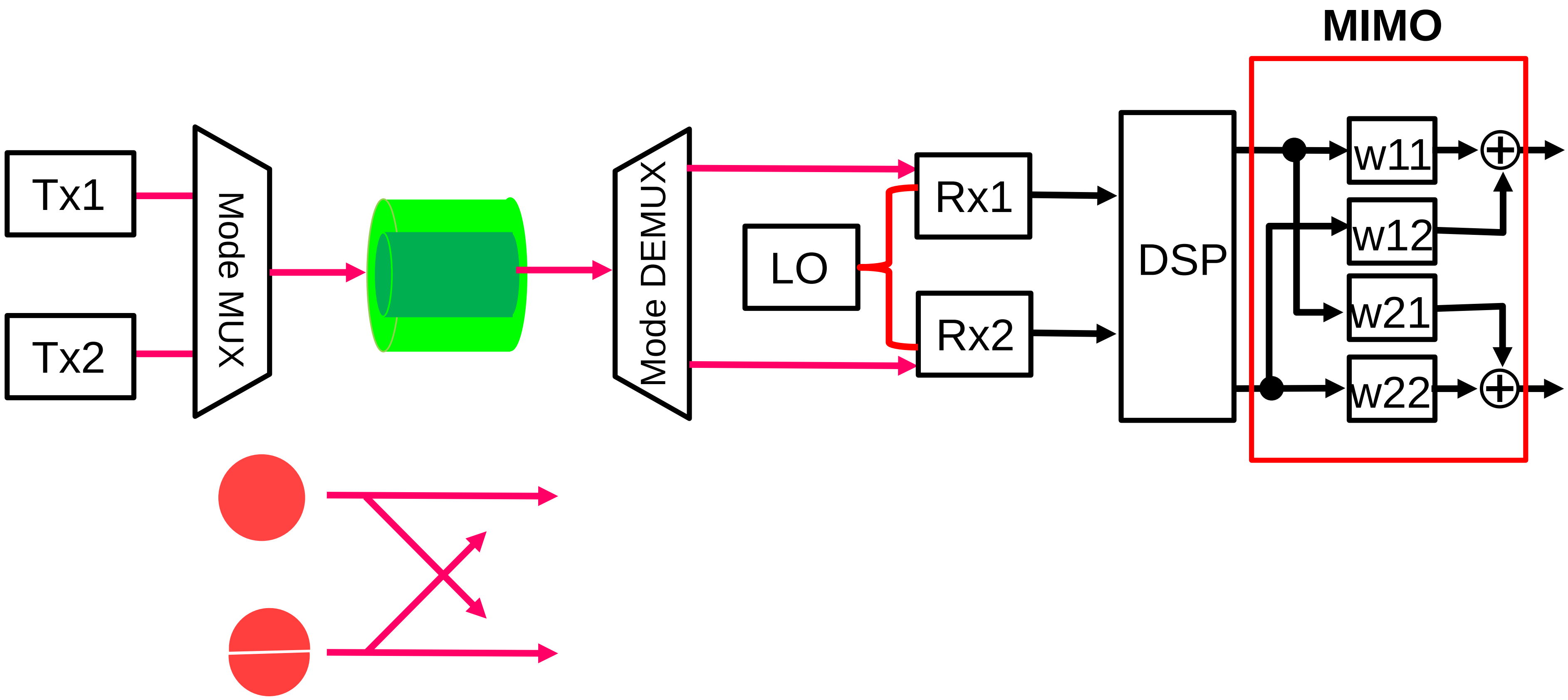
- 自由空間系
- 方向性結合器
- 平面導波路

※この段階の分離信号には、伝送途中でのモード変換成分が線形に混合

→ 分離・再生が必要

→ Multiple-Input/Multiple-Output (MIMO)
行列の特異値分解演算を利用

モード間クロストークの補償



モード間の変換・クロストークの発生 ➡ 重み付け係数wによる補償