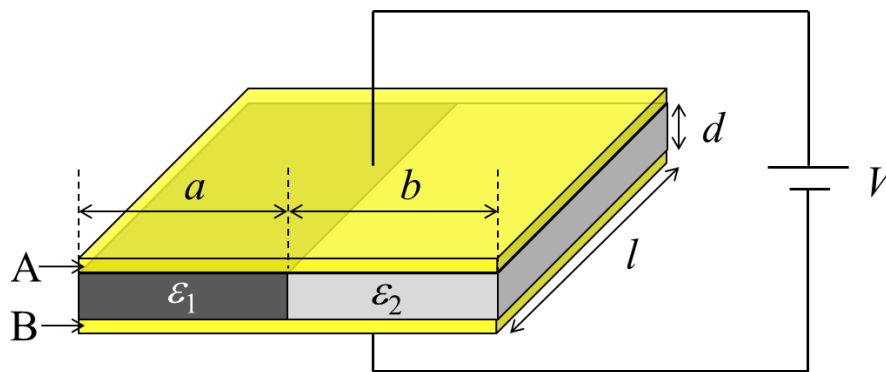


電磁気学第一 演習 第12回 解答

45. 図のように間隔 d 、幅 l の平行導体板 A, B 間に長さ a で誘電率 ϵ_1 、長さ b で誘電率 ϵ_2 の誘電体が満たしてある。A, B 間の静電容量および、電位差 V を与えたときの導体板上正極側の真電荷分布を求めよ。ただし、端部効果は無視する。

ヒント：誘電体の電界を求め、導体表面において誘電体を含むガウスの法則を2つの誘電体それぞれの場合で用い、導体表面の電荷密度を求める。



【解答】

ϵ_1 , ϵ_2 の部分では上下に電極があるから電位が等しいので、全空間で電界は一樣となる（また、電界の媒質境界での接線成分は連続（等しい）なので、 ϵ_1 , ϵ_2 の媒質境界で電界分布は乱されない。電束密度の接線成分は ϵ_1 , ϵ_2 の媒質境界で不連続となっているが、境界条件では法線成分の連続性しか要求されないなので、接線成分は不連続でも構わない）。

電位差 V を与えると、

$$E = \frac{V}{d}$$

$$Q = \sigma_1 l a + \sigma_2 l b = l(\sigma_1 a + \sigma_2 b)$$

また、

$$\sigma_1 = D_1 = \epsilon_1 E = \epsilon_1 \frac{V}{d}$$

$$\sigma_2 = D_2 = \epsilon_2 E = \epsilon_2 \frac{V}{d}$$

より、

$$Q = \frac{lV}{d} (\epsilon_1 a + \epsilon_2 b)$$

よって、

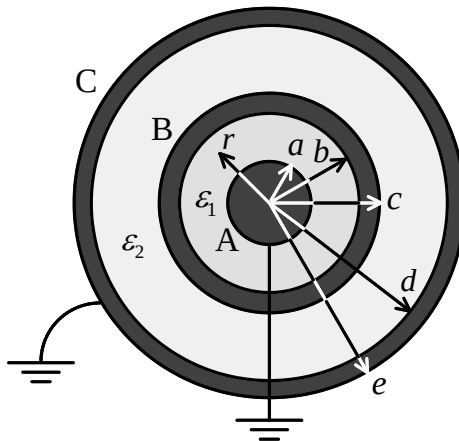
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{l}{d}(\epsilon_1 a + \epsilon_2 b)$$

■

48. 図に示すように、半径 a の導体球 A と内半径 d 、外半径 e の同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径 b 、外半径 c の導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率 ϵ_1 の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率 ϵ_2 の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q を与えた。以下の問に答えよ。

(ヒント: $r = a, b, c, d, e$ における真電荷の総和をそれぞれ Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e とおき、それぞれの領域で成り立つ条件を考え、電荷間の関係を求めていく。特に、電極 A, C は接地されているため、A から B の電圧と、C から B の電圧は同じになることに注意。)

- (1) 球の中心から $r = a, b, c, d, e$ における真電荷量、分極電荷量を符号も含めて求めよ。
- (2) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。



【解答】

- (1) $r = a, b, c, d, e$ における真電荷の総和をそれぞれ Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e とおく。すると、
 $Q = Q_b + Q_c$

今導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用する。導体内部は電界が 0 であるから、
 $Q_a + Q_b = 0$

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、同様にして、
 $Q_c + Q_d = 0$

もし Q_e が有限の値であると、無限遠と導体 C は電位差を持つことになる。しかし今導体 C は接地されているので、

$$Q_e = 0$$

対称性により電界は放射方向成分 r のみの関数である。 $a \leq r \leq b$ に球状の閉曲面をとりガ

ウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{-Q_b}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

$c \leq r \leq d$ に球状の閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r^2}$$

導体 A と C はともに接地されているので電位差は 0 なので、

$$-\int_a^d E(r) dr = -\int_a^b \frac{-Q_b}{4\pi\epsilon_1 r^2} dr - \int_c^d \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r^2} dr = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c} \right) = 0$$

よって、

$$Q_b = \frac{\epsilon_1 ab(d-c)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$$Q_c = \frac{\epsilon_2 cd(b-a)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} Q$$

これより、

$$Q_a = -\frac{\epsilon_1 ab(d-c)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$$Q_d = -\frac{\epsilon_2 cd(b-a)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$r=a, b, c, d, e$ における分極電荷を q_a, q_b, q_c, q_d, q_e とおくと、 $r>e$ は真空なので、

$$q_e = 0$$

導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、導体内部は電界が 0 であるから、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b = q_a + q_b = 0$$

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b + Q_c + q_c + Q_d + q_d = q_c + q_d = 0$$

$a \leq r \leq b$ における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$\frac{Q_a + q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_1 r^2} \Rightarrow$$

$$q_a = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) Q_a = -\frac{\epsilon_1 ab(d-c)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) Q$$

$$q_b = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) Q_b = \frac{\epsilon_1 ab(d-c)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) Q$$

同様に $c \leq r \leq d$ における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$q_c = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q_c = \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q$$

$$q_d = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q_d = - \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q$$

(2) 導体 B の電位 V は、

$$V = - \int_a^b \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

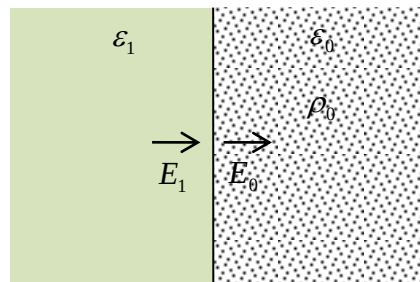
よって静電容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \left(\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)$$

■

48' . 図のように、平面境界を境に左の空間は誘電率 ε_1 の誘電体で満たされ、右の空間は誘電率 ε_0 で一様な電荷密度 ρ_0 で満たされている。左右の空間にそれぞれ E_1 , E_0 の電界の境界垂直成分があるとき、次の量を求めよ。

- (i) 左右の空間の電束密度 D_1 , D_0 と、境界上の真電荷の面電荷密度 σ
- (ii) 境界上の分極電荷の面電荷密度 σ_p



【解答】

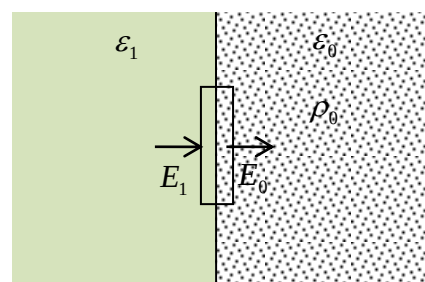
(i)

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0$$

$$(\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dv \text{ より})$$

$$D_0 - D_1 = \sigma$$



$$\sigma = D_0 - D_1 = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_1 E_1$$

(ii)

$$(\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} dv \text{ より})$$

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma + \sigma_p)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 E_1 - \sigma \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \end{aligned}$$

■