

電磁気学第一 演習 第6回 解答

15”.

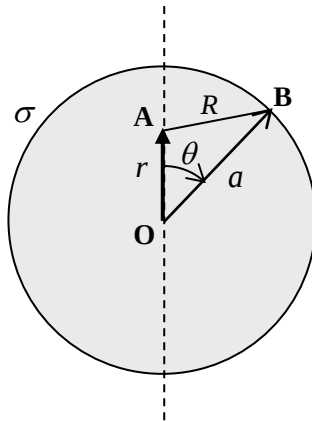
(1) 下図のように半径 a の球の表面に一様に表面電荷密度 σ が分布している。このとき、ガウスの法則を使って電界を求め、球の中心からの距離の関数で表し、グラフを描け。

次に、この電界から無限遠点を基準とする電位分布を求め、同じように図示せよ。

(2) (1)と同じ電荷密度分布に対して、ガウスの法則を用いる代わりに、以下の方法で電位と電界を求めよ。

球上の任意の点 B と、中心 O から r 離れた A 点との距離 R は、角度 θ を用いて $R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$ と表される。この B 点の微小電荷が A 点に作る電位を、球表面全体で面積分して、電位を半径 r の関数として求めよ。また、求めた電位より、電界を求めよ。 $r \leq a, a < r$ の場合に注意すること。

ただし、不定積分 $\int \frac{\sin \theta}{\sqrt{a - b \cos \theta}} d\theta = \frac{2\sqrt{a - b \cos \theta}}{b} + C$ を用いてもよい。



【解答】

(1)

電界

$0 \leq r < a$ 電荷は存在しないので、半径 r の球に対してガウスの法則を適用して $E = 0$

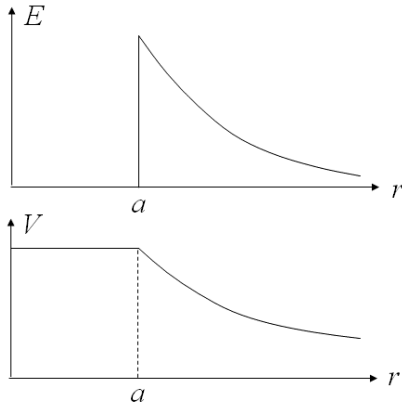
$a \leq r$ 半径 r の球に対してガウスの法則を適用して

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi a^2 \sigma \quad \text{より} \quad E = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r^2}$$

電位

$$a \leq r \quad V = - \int_{\infty}^r E dr = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r}$$

$$0 < r < a \quad V = \frac{a\sigma}{\epsilon_0}$$



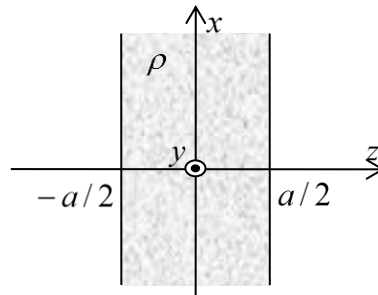
(2)

【解答】

球座標系における面積素をかけて面積分する。

$$\begin{aligned}
 \phi &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \\
 &= \frac{\sigma a^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}{ar} \right]_0^{\pi} \cdot 2\pi \\
 &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} \left(\sqrt{a^2 + r^2 + 2ar} - \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar} \right) \\
 &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} \left\{ \sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2} \right\} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} \left\{ (a+r) - \sqrt{(a-r)^2} \right\} \\
 &= \begin{cases} \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} \left\{ (a+r) - (a-r) \right\} & (r \leq a) \\ \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 r} \left\{ (a+r) + (a-r) \right\} & (a < r) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{\sigma a}{\epsilon_0} & (r \leq a) \\ \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r} & (a < r) \end{cases} \\
 \mathbf{E} = -\nabla \phi = -\hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} &= \begin{cases} \mathbf{0} & (r \leq a) \\ \hat{r} \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2} & (a < r) \end{cases}
 \end{aligned}$$

- 11' . $-a/2 \leq z \leq a/2$ の空間は一様な電荷密度 ρ で満たされており、 x, y 方向には一様な分布をしているとき、 z 軸上 ($z \geq 0$) の電界分布を求めよ。



【解答】

- (i) $-a/2 \leq z \leq a/2$ でガウスの法則を適用する

面積 S で軸が z 軸に平行な筒を考え、その筒に対してガウスの法則 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv$ を

適用する。筒の両端の位置は $\pm z$ とすると、対称性より、両端での電界の値は等しい（向きは逆）。また、対称性より、電界は筒の側面成分は持たない。従って、

$$2E_z S = \rho \cdot 2zS / \epsilon_0$$

(修正前の解答では $1/\epsilon_0$ が抜けていました。

指摘していただいた学生君ありがとうございました。)

$$E_z = \rho z / \epsilon_0$$

- (ii) $a/2 \leq |z|$ でガウスの法則を適用する

$$2E_z S = \rho a S / \epsilon_0$$

$$E_z = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$$

まとめると、

$$E_z = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0} & (z \leq a/2) \\ \frac{\rho a}{2\epsilon_0} & (z > a/2) \end{cases}$$