電磁気学第一　演習 第４回 解答

【VA-64’】以下のベクトルの回転を求めよ。

(1) $-xy^3z^2\hat{x}+\left(x-2y\right)\hat{y}-xy^2\hat{z}$

(2) $\rho^2\hat{\rho}+\dfrac{1}{\rho}\hat{\varphi}-\rho\hat{z}$

(3) $\dfrac{\cos\varphi}{r}\hat{\theta}$

<u>解答</u>

(1)

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -xy^3z^2 & \left(x-2y\right) & -xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}\begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \left(x-2y\right) & -xy^2 \end{vmatrix} + \hat{y}\begin{vmatrix} \partial/\partial z & \partial/\partial x \\ -xy^2 & -xy^3z^2 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ -xy^3z^2 & \left(x-2y\right) \end{vmatrix}$$

$$= -2xy\hat{x} - y^2(2xyz-1)\hat{y} + \left(1+3xy^2z^2\right)\hat{z}$$

(2)

$$\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ \rho^2 & 1 & -\rho \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{\hat{\rho}\begin{vmatrix} \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 1 & -\rho \end{vmatrix} + \rho\hat{\varphi}\begin{vmatrix} \partial/\partial z & \partial/\partial\rho \\ -\rho & \rho^2 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi \\ \rho^2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[\hat{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\rho)-\frac{\partial}{\partial z}(1)\right\} + \rho\hat{\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(\rho^2)-\frac{\partial}{\partial\rho}(-\rho)\right\} + \hat{z}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}(1)-\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2)\right\}\right]$$

$$= \hat{\varphi}$$

(3)

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ 0 & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin\varphi}{r^2\sin\theta}\hat{r}$$

【VA-67’’】Fig. VA-67’’にしめす$\rho=1,\ 0\le z\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi$で定義される円筒において、まず$z=0$ の円筒底面上の経路C に対して$\mathbf{A}=\hat{\varphi}$の接線線積分を求めよ。ただし、積分経路はz正方向を見て右回りとする。また、円筒の上面S_1および円筒の側面S_2 に対して$\mathbf{A}$の回転の法線面積分（面素ベクトルの向きは円筒内部から外に向かう方向）を求め、ストークスの定理が成立していることを確認せよ。

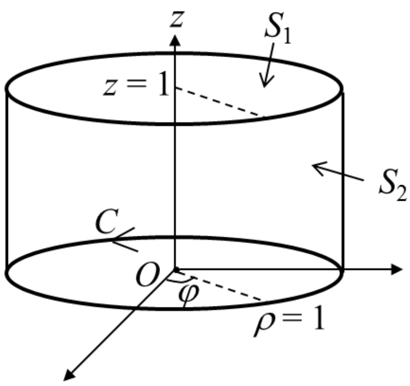

Fig. VA-67’’

解答

計算は円筒座標で行う。線積分は、

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}\rho d\varphi\Big|_{\rho=1}$$

$$=\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi=2\pi$$

次に、回転を求める。

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ 0 & \rho & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}\hat{z}$$

$$\iint_{S_1} \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\frac{1}{\rho}\rho d\rho d\varphi$$
$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\iint_{S_2} \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{1} 0 d\rho dz$$
$$= 0$$

円筒の上面 S_1 および円筒の側面 S_2 の面積分の和は 2π であり、これは先の線積分の値と等しい。よって、ストークスの定理が成立していることが確認できた。

【VA-82】u をスカラー関数、$\mathbf{A}$ をベクトル関数とするとき、以下の諸公式が成り立つことを示せ。

(ii) $\nabla\cdot(u\mathbf{A}) = \nabla u\cdot\mathbf{A} + u\nabla\cdot\mathbf{A}$

(vii) $\nabla\times\nabla u = 0$

<u>解答</u>

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(u\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(uA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(uA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(uA_z)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}A_x + u\frac{\partial A_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}A_y + u\frac{\partial A_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}A_z + u\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}A_x + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + \frac{\partial u}{\partial z}A_z + u\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\\ &= \mathbf{A}\cdot\nabla u + u\nabla\cdot\mathbf{A}\end{aligned}$$

(vii)

$$\nabla u = \hat{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla u &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \end{vmatrix} \\
&= \hat{x} \begin{vmatrix} \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} \partial / \partial x & \partial / \partial z \\ \partial u / \partial x & \partial u / \partial z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial / \partial x & \partial / \partial y \\ \partial u / \partial x & \partial u / \partial y \end{vmatrix} \\
&= \hat{x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

■