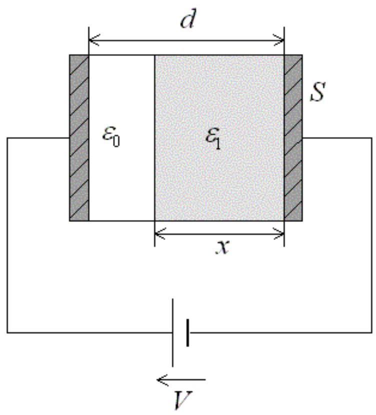
電磁気学第一　演習 第１３回 解答

52. 図のように間隔d，面積Sの平行極板間に誘電率ε_1の誘電体が挿入してある。端部効果は無視できるとした場合、次の問いに答えよ。
   (1) 極板間の静電容量Cを求め、xを横軸としてCの値を図示せよ。
   (2) コンデンサが蓄積するエネルギーを求めよ。静電容量を用いる方法と、空間の蓄積エネルギーを用いる方法の２通りの方法で計算し、両者の値が一致することを確認せよ。
   (3) 極板間の力を求め、xとの関係を同様に図示せよ。電位を一定にした場合の仮想変位の方法（電源がした仕事も入れて、系全体のエネルギー変化を考慮する）と、充電後に電源を切り離して電荷を一定にした場合の仮想変位の方法の２通りを試し、両者の値が一致することを確認せよ。



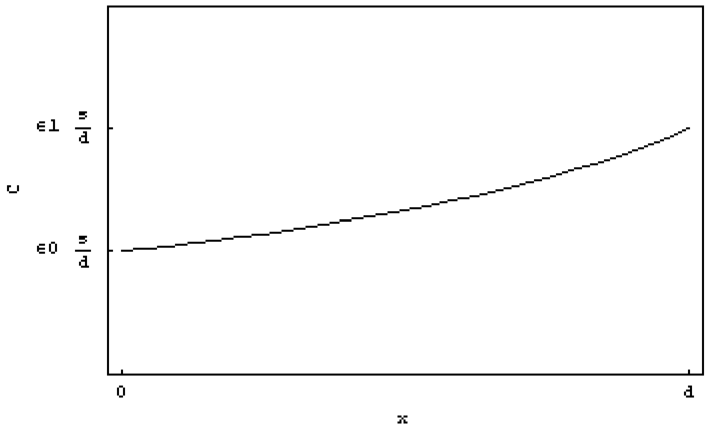
【解答】

(i)

コンデンサの直列接続の公式を使って、

$$C=\frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_0\dfrac{S}{d-x}}+\dfrac{1}{\varepsilon_1\dfrac{S}{x}}}=\frac{S}{\dfrac{d-x}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{\varepsilon_0 x+\varepsilon_1(d-x)}$$

$$=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)x+\varepsilon_1 d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_0-\varepsilon_1}S\frac{1}{x-\dfrac{1}{1-\varepsilon_0/\varepsilon_1}d}$$



(ii)

電気回路的な考え方:

$$W=\int_{v=0}^{V}Qdv=\int_{v=0}^{V}(Cv)dv=C\int_{v=0}^{V}vdv=C\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^V=\frac{1}{2}CV^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{S}{\dfrac{d-x}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}V^2$$

電気磁気学的な考え方:

$$W=\iiint_V\frac{1}{2}\varepsilon|\mathbf{E}|^2dv$$

$$D=\varepsilon_0E_0=\varepsilon_1E_1=\sigma\quad\Rightarrow\quad E_0=\sigma/\varepsilon_0,\ E_1=\sigma/\varepsilon_1$$

$$E_0(d-x)+E_1x=V\ \Rightarrow\ \sigma\left\{\frac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\frac{x}{\varepsilon_1}\right\}=V\ ,\ \sigma=\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}$$

$$E_0=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}},\ E_1=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}$$

$$W=\frac{1}{2}S(d-x)\varepsilon_0\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}\right]^2+\frac{1}{2}Sx\varepsilon_1\left[\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}\right]^2$$

$$=\frac{S}{2}\left[\frac{V}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}\right]^2\left(\frac{d-x}{\varepsilon_0}+\frac{x}{\varepsilon_1}\right)=\frac{S}{2}\frac{V^2}{\dfrac{(d-x)}{\varepsilon_0}+\dfrac{x}{\varepsilon_1}}$$

(iii)

$\Delta W = \Delta W_e - F\Delta d$　　(F は物体が外部に与える力)

$F\Delta d = \Delta W_e - \Delta W$

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial d} - \frac{\partial W}{\partial d}$$

[V=一定]

$$W = \frac{1}{2}CV^2$$

$$\frac{\partial W}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{1}{2}CV^2\right\} = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d} = \frac{V^2}{2}\frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d}\right\}$$

$$= \frac{V^2}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1 S\frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{1}{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d}\right\} = -\frac{V^2}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1 S\frac{\varepsilon_1}{\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d\}^2}$$

$$= -\frac{SV^2}{2}\frac{\varepsilon_0{\varepsilon_1}^2}{\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d\}^2}$$　　(この系の蓄積エネルギー変化)

$$\frac{\partial W_e}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}(QV) = \frac{\partial}{\partial d}(CV^2) = V^2\frac{\partial C}{\partial d} = 2\frac{\partial W}{\partial d}$$　　(電源がこの系にした仕事変化)

よって、

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial d} - \frac{\partial W}{\partial d} = 2\frac{\partial W}{\partial d} - \frac{\partial W}{\partial d} = \frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{SV^2}{2}\frac{\varepsilon_0{\varepsilon_1}^2}{\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d\}^2}$$

[Q=一定]

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{Q}{C}\right)^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

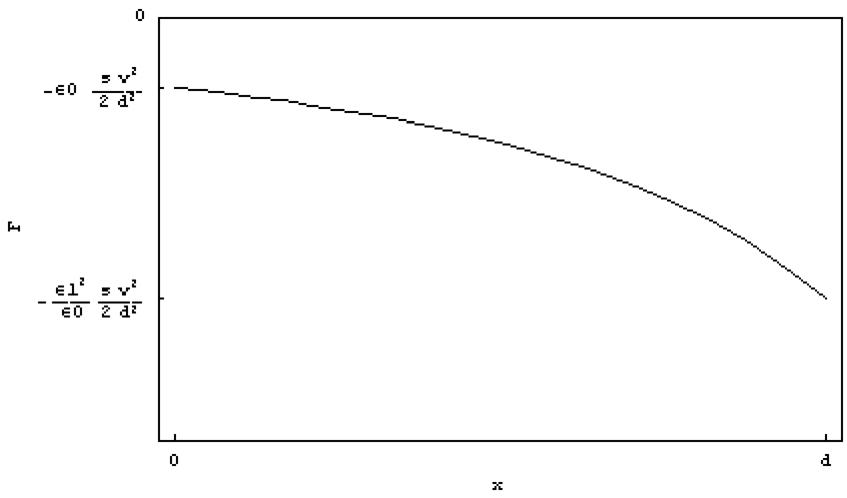
$$F = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{1}{C}\right)$$

$$= -\frac{Q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial d}\right) = \frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d}$$

あとは V=一定のときの計算と同じで、

$$= -\frac{SV^2}{2}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1{}^2}{\{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)x + \varepsilon_1 d\}^2}$$

F は d が増える方向が正の向きに取ってあるから、極板は引き合う。

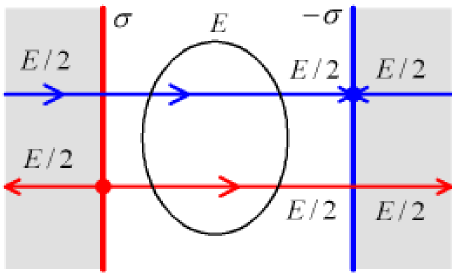


誘電体が厚くなるほど極板が引き合う力は大きくなる。

[クーロンの法則による計算]
問題では答える必要は無いが、この方法でももちろん力は一致することを確認しよう。
クーロンの法則 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ を用いる。
極板間の ε_0 の部分の電界を E_0 とすると、

$$F = q\frac{E_0}{2} = \sigma S\frac{E_0}{2} = \varepsilon_0 E_0 S\frac{E_0}{2}$$

(上で E_0 ではなく、$E_0/2$ となっているのは、クーロンの法則で力を計算するときは自分が作る電界は考慮しないからである)



(電束密度 D は一定なので)

$$= DS\frac{D/\varepsilon_0}{2} = S\frac{D^2}{2\varepsilon_0}$$

((ii)より)

$$= \frac{S}{2\varepsilon_0}\left[\frac{V}{\frac{(d-x)}{\varepsilon_0} + \frac{x}{\varepsilon_1}}\right]^2 = \frac{SV^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\left\{\frac{(d-x)}{\varepsilon_0} + \frac{x}{\varepsilon_1}\right\}^2} = \frac{SV^2}{2}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1{}^2}{\{\varepsilon_1(d-x) + \varepsilon_0 x\}^2}$$

$$=\frac{SV^2}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1{}^2}{\{(\varepsilon_0-\varepsilon_1)x+\varepsilon_1 d\}^2}$$

参考

解答の計算では、d で偏微分を行った。これは d を少し変化させたときの変化量を見たのであり、力の計算をするときには片方の極板は固定して動かないという条件で着目している極板が受ける力を計算したのである。従って、固定した方の極板が今着目している極板から受ける力も作用・反作用の法則によりもちろん同じ大きさで向きが逆の力を受けている。つまり、同じ力で引き合っているのである。

■

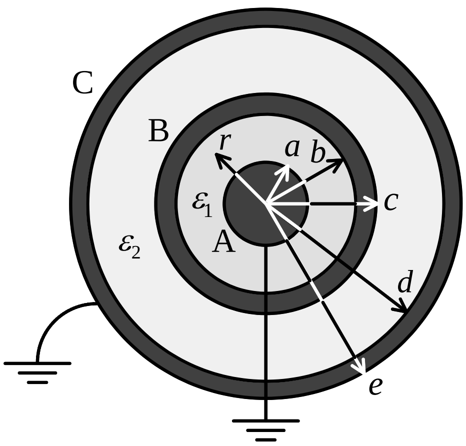
48'. （前回の演習問題 48.への追加設問。前回 48.の続きとして解くこと。）
図に示すように、半径 a の導体球 A と内半径 d 、外半径 e の同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径 b 、外半径 c の導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率 ε_1 の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率 ε_2 の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q[C]を与えた。以下の問に答えよ。

(1)
(2) 前回

(3) 系に蓄えられている静電エネルギーを求めよ。ただし静電容量を用いる方法、および、エネルギー密度を空間積分する方法の二通りの方法で求め、両者が等しくなることを確認せよ。

(4) 導体 C の内側 $r=d$ の境界が受ける力を求めよ。

(5) 導体 B の外側 $r=c$ の境界が受ける力を求めよ。



【解答】

(3) 系に蓄えられる静電エネルギーは、

[電界が蓄えるエネルギー]

$$W=\iiint_V \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv=\int_a^b \frac{1}{2}\frac{{Q_a}^2}{16\pi^2\varepsilon_1 r^4}4\pi r^2 dr+\int_c^d \frac{1}{2}\frac{(Q_a+Q_b+Q_c)^2}{16\pi^2\varepsilon_2 r^4}4\pi r^2 dr$$

$$=\frac{{Q_a}^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{{Q_c}^2}{8\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\varepsilon_1\left(ab(d-c)\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\varepsilon_2\left(cd(b-a)\right)^2\right\}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{(b-a)\varepsilon_1 ab(d-c)^2+(d-c)\varepsilon_2 cd(b-a)^2\right\}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}\right)^2\left\{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)\right\}(b-a)(d-c)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{(b-a)(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c)+\varepsilon_2 cd(b-a)}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}$$

[コンデンサが蓄えるエネルギー]

$$W=\frac{1}{2}CV^2=\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{8\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}$$

(4)

境界に働く力は、r 方向を力の正の向きとすると、仮想変位の原理から、

$$F=-\left.\frac{\partial W}{\partial d}\right|_{Q=一定}$$

$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial d}\left\{\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}\right\}=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\varepsilon_2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}\right)$$

$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{c}{d-c}\right)^2$$

【別解(V=一定で計算しても結果は同じ)】

$$F=\left.\frac{\partial W}{\partial d}\right|_{V=一定}=\left.\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{1}{2}CV^2\right)\right|_{V=一定}=\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial d}$$

$$=\frac{V^2}{2}\frac{\partial}{\partial d}\left\{4\pi\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)\right\}=2\pi\varepsilon_2V^2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}$$

$$=2\pi\varepsilon_2\left\{\frac{Q}{4\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}}\right\}^2\frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2}$$

$$=-\frac{Q}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{c}{d-c}\right)^2$$

$F<0$なので収縮しようとする。

(5)

$$F=-\left.\frac{\partial W}{\partial c}\right|_{Q=一定}$$

$$=-\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial c}\left\{\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)}\right\}=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{1}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\varepsilon_2\frac{d(d-c)-cd(-1)}{(d-c)^2}\right)$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi}\frac{\varepsilon_2}{\left(\varepsilon_1\frac{ab}{b-a}+\varepsilon_2\frac{cd}{d-c}\right)^2}\left(\frac{d}{d-c}\right)^2$$

$F>0$なので膨張しようとする。

■