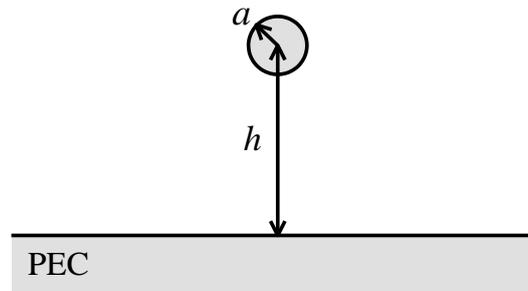


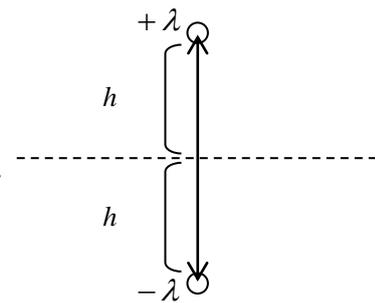
電磁気学第一 演習 第11回 解答

42. 地上 h の高さに半径 a の導線が張ってある。単位長あたりの対地静電容量を求めよ。ただし、 $h \gg a$ とする。



【解答】

静電容量を求める問題なので、まずは電線に単位長さ当たり $+\lambda$ 、PEC に $-\lambda$ (接地されているから自然にそうなる) の電荷を与える。 $h \gg a$ の条件があるので、導線上の電荷分布は線電荷と見なすことができる(電気映像法を用いたとき、映像電荷が導線付近の電界に与える影響は少なく、電界はほぼ軸対称だから)。次に、導線の地面に対する電圧を求めたい。電界を接線線積分すればよいが、簡単には求まらない。幸い、電気映像法を使えば地上の電界分布は求められる。そこで、右図のように地面を取り除き、PEC の面に対称な位置に符号が逆の電荷分布、つまり $-\lambda$ を配置する(すると地表があった場所で電界が垂直に入り、境界条件が満たされるから、解の一意性より、上の分布は元の問題と同じものが得られる)。



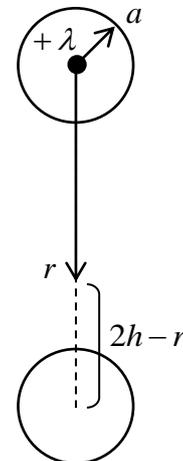
右のように座標系を取ると、線電荷を結ぶ線上で下向きを正とすると、

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2h-r)}$$

$$E_r = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2h-r} \right)$$

よって、

$$V = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=h}^a E_r(-dr)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r=a}^h \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2h-r} \right) dr \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln(2h-r)]_a^h \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{a} - \ln \frac{h}{2h-a} \right) \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a} \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a}
\end{aligned}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h-a}{a}} \cong \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}$$

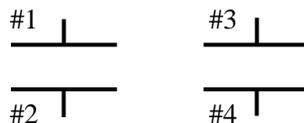
■

44' . 電位係数行列を用いたコンデンサの並列・直列接続の公式の導出を行う。2つのコンデンサがあり、極板の導体は全部で4つあるので、4導体系と見なすことができる。コンデンサ1は導体#1,#2により形成され、コンデンサ2は導体#3,#4により形成される。今、相互結合を無視し、電位係数行列が次の形に書けたとする。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & p_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} & \beta \\ 0 & 0 & \beta & p_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{bmatrix}$$

このとき、次の量を求めよ。

- (1) コンデンサ#1,#2の静電容量 C_{12} および、コンデンサ#3,#4の静電容量 C_{34}
- (2) 導体#1,#3を導線で接続、導体#2,#4を導線で接続（並列接続）したときの導体#1(#3), #2(#4)間の静電容量
- (3) 導体#2,#3を導線で接続（直列接続）したときの#1,#4間の静電容量



【解答】

- (1) コンデンサ#1,#2の静電容量 C_{12} は、 $Q_1 = -Q_2 = Q$, $V = V_1 - V_2$ として、

$$\begin{cases} V_1 = (p_{11} - \alpha)Q \\ V_2 = (\alpha - p_{22})Q \end{cases}$$

よって、

$$C_{12} = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2\alpha}$$

同様に、コンデンサ#3,#4の静電容量 C_{34}

$$C_{34} = \frac{1}{p_{33} + p_{44} - 2\beta}$$

(2)

並列接続し、上下の極板に異符号、同量の電荷を与えるので、次の条件が必要となる。

$$\begin{cases} Q_2 = -Q_1 \\ Q_4 = -Q_3 \\ Q_1 + Q_3 = Q \\ Q_2 + Q_4 = -Q \\ V_1 - V_2 = V_3 - V_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = (p_{11} - \alpha)Q_1 = (p_{33} - \beta)(Q - Q_1) & (V_1 = V_3 \text{より}) \\ V_2 = (\alpha - p_{22})Q_1 = (\beta - p_{44})(Q - Q_1) & (V_2 = V_4 \text{より}) \end{cases}$$

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2\alpha)Q_1 = (p_{33} + p_{44} - 2\beta)(Q - Q_1)$$

$$\rightarrow Q_1 = \frac{p_{33} + p_{44} - 2\beta}{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta} Q$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{(p_{11} + p_{22} - 2\alpha)Q_1} = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta}{(p_{11} + p_{22} - 2\alpha)(p_{33} + p_{44} - 2\beta)} \\ &= \frac{1}{p_{11} + p_{22} - 2\alpha} + \frac{1}{p_{33} + p_{44} - 2\beta} = C_{12} + C_{34} \end{aligned}$$

(3)

直列接続すると次の条件が必要となる。

$$\begin{cases} Q_1 = Q \\ Q_2 = -Q \\ Q_3 = Q \\ Q_4 = -Q \\ V_2 = V_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = (p_{11} - \alpha)Q & \textcircled{1} \\ V_2 = (\alpha - p_{22})Q = (p_{33} - \beta)Q \rightarrow p_{22} + p_{33} - \alpha - \beta = 0 & \textcircled{2} \\ V_4 = (\beta - p_{44})Q & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_1 - V_4} = \frac{1}{p_{11} + p_{44} - \alpha - \beta}$$

一方、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}}} &= \frac{1}{p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} - 2\alpha - 2\beta} \\ &= \frac{1}{p_{11} + p_{44} - \alpha - \beta} \end{aligned}$$

したがって、

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{34}}}$$

■