

電磁気学第一 演習 第5回 解答

6''. (1) Fig. 6(a)のように半径 r の円輪を線電荷密度 σ で一様に帯電させるとき、円輪の中心を通り垂直な軸上 (z 軸上) の電界を微小円輪の微小電荷 σdl がつくる電界を足し合わせることで求めよ。

(2) もし線電荷が r 方向に微小幅 dr を持ち、バームクーヘン状になっているとき、これが z 軸上につくる電界は(1)の結果から、線電荷密度 σ を面電荷密度 σ' に置き換え、それに dr をかけたものになる。それを踏まえ、Fig. 6(b)のように、半径 a の円盤が面電荷密度 σ' で一様に帯電しているとき、同様に z 軸上に作る電界を求めよ。

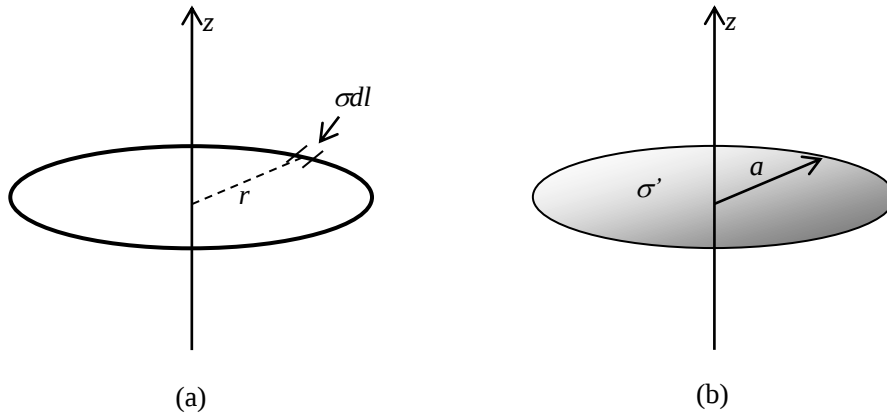


Fig. 6''

【解答】

(1)

対称性より、電界は z 成分しか持たない。微小線分が作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}} dl = \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}} r d\varphi$$

であるので、

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{z\sigma}{4\pi\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}} r d\varphi \\ &= \frac{z\sigma r}{2\epsilon_0(r^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(2)

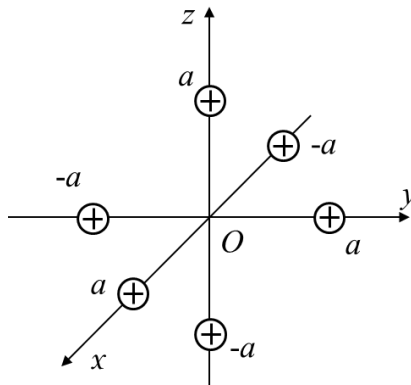
問題文の通り、微小バームクーヘンが作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma' r}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} dr$$

よって、

$$\begin{aligned} E_z &= \int_{r=0}^a \frac{z\sigma' r}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}} dr \\ &= \frac{z\sigma'}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^a \\ &= \frac{z\sigma'}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

6''' . 6つの点電荷 $q/6$ が図のように配置されている。 x 軸上 ($x \geq 0$) 上の電界を求め、概形を図示せよ。また、点電荷 q が1つだけ原点にある場合の電界と比較せよ。



【解答】

(i) $x < a$ のとき

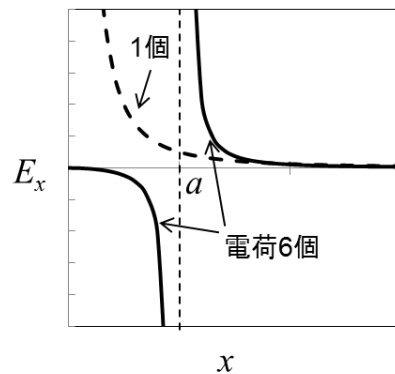
$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{6} \left[-\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{4}{a^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right]$$

(ii) $x \geq a$ のとき

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{6} \left[\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{(a+x)^2} + \frac{4}{a^2+x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right]$$

電荷が中心に1個のときは

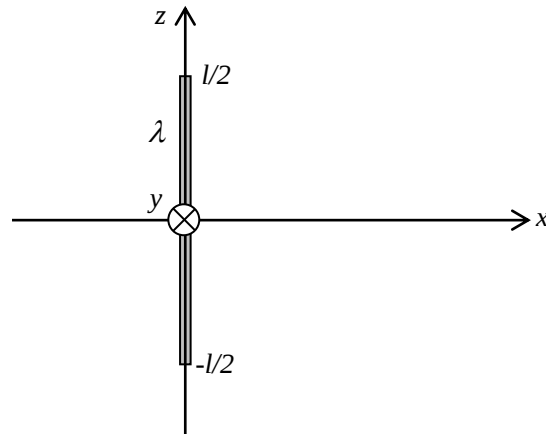
$$E_x = q/4\pi\epsilon_0 x^2$$



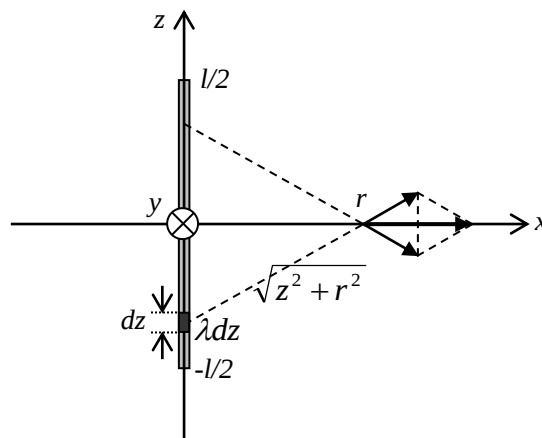
5. 長さ l の直線状電荷があるとき、この直線状電荷の中点を通り、かつ垂直な面内の電界を求めよ。ただし、線状電荷の線電荷密度は λ [C/m] とする。必要があれば

$$\text{公式} \quad \int (z^2 + a^2)^{-3/2} dz = \frac{z}{a^2 \sqrt{z^2 + a^2}} + C$$

を用いて良い。



解答

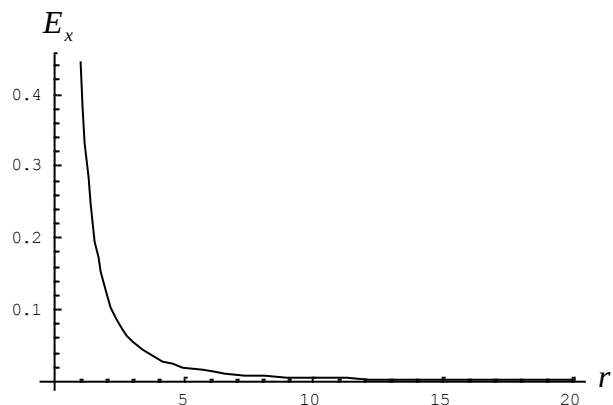


対称性より、電界は x 軸上で x 成分しか持たない。 z の位置にある長さ dz の微小線電荷が

$x = r$ の位置に作る電界の x 成分は $\frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$ であり、

これを積分して、

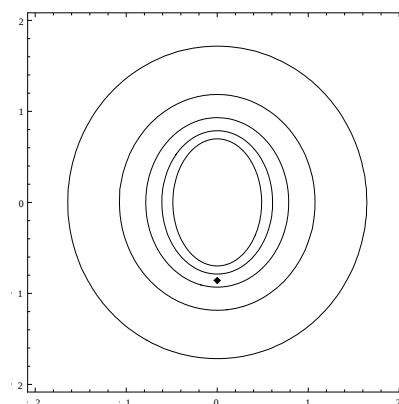
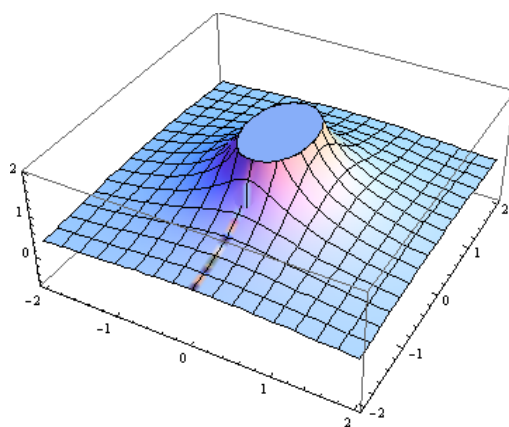
$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{z=-l/2}^{l/2} \\
 &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{l/2}{r^2 \sqrt{(l/2)^2 + r^2}} - \frac{-l/2}{r^2 \sqrt{(l/2)^2 + r^2}} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}}
 \end{aligned}$$

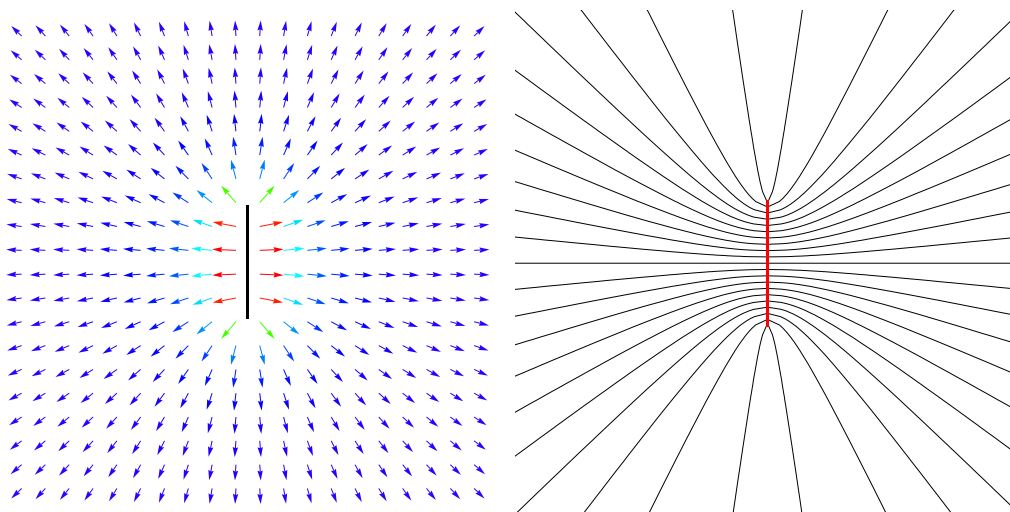


ところで、 $l \rightarrow \infty$ (無限長線電荷) とすると、

$$\lim_{l \rightarrow \infty} E_x = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l/2}\right)^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

となり、ガウスの法則と対称性から求めた界と一致する。逆に言うと、 $r \ll l$ のときは無限長線電荷が作る電界で良く近似できると言える。





[積分公式の導出]

■ 微分積分の知識より、

$R(X,Y)$ を X,Y の有理関数として、 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ の形のものは、 $a > 0$ の場合

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$ と置換すると、

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{at}+b}, \frac{\sqrt{at^2+bt+\sqrt{ac}}}{2\sqrt{at}+b}\right) \frac{2\sqrt{at^2+2bt+2\sqrt{ac}}}{(2\sqrt{at}+b)^2} dt$$

と t の有理関数に変形されるので不定積分が求まる。

■ この問題の積分は $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ の形をしている。

$$\int (x^2+a^2)^{-3/2} dx$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = t - x$$

$$x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2-a^2}{2t}$$

$$\sqrt{x^2+a^2} = t - x = \frac{2t^2 - t^2 + a^2}{2t} = \frac{t^2+a^2}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(2t)(2t) - (t^2+a^2)2}{4t^2} = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2a^2}{4t^2} = \frac{t^2+a^2}{2t^2}$$

$$= \int \left(\frac{2t}{t^2+a^2} \right)^3 \frac{t^2+a^2}{2t^2} dt = \dots \quad (\text{やればできるが、面倒なので次の方法にする})$$

■ さらに、この問題の積分は $R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$ の形をしている ($x = a \tan \theta$ の置換でできる)。

$$\int (x^2 + a^2)^{-3/2} dx$$

$$x = a \tan \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a \sqrt{\tan^2 \theta + 1} = \frac{a}{\cos \theta}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int \left(\frac{\cos \theta}{a} \right)^3 \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a^2} \int \cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta}{a^2} + C$$

$$= \frac{\sin \tan^{-1} \frac{x}{a}}{a^2} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

ところで、**Mathematica** を使って次のようなコマンドを打つと一瞬で積分できてしまう。コンピュータはどんどん進化する。人間は何をやるべきか考えよう（不定積分可能かどうかの判定ができること、本気を出せば手計算できること。不定積分は必ずしも求まるとは限らないことを証明する**ガロア理論**という偉大で美しい理論があることを知っていることなど）。

$\text{In}[1]:= \text{Integrate}\left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}}, z\right]$ $\text{Out}[1]= \frac{z}{a^2 \sqrt{a^2 + z^2}}$
--