2017 年 12 月 15 日 (2017 年 12 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二講義資料 4

前回までの訂正

- 12 月 11 日の講義で「$h \to 0$ のとき h^2 は h よりももっと早く 0 に近付く」と書きました．「速く」が正しい字（収束の速さ）.
- 12 月 11 日の講義で扱った例題で，係数が違っていたようです：

$$3\tan x - 3x - x^3 = \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) \qquad \Rightarrow \qquad 3\tan x - 3x - x^3 = \frac{2}{5}x^5 + o(x^5).$$

- 講義資料 2, 1 ページ（前回までの訂正）の 7 つ目：2017 と 2018 が逆.
- 講義資料 2, 6 ページ，質問 43 の回答：f に対してん ⇒ f に対して
- 講義資料 2, 6 ページ，質問 45 の回答：少くとも ⇒ 少なくとも
- 講義ノート，9 ページ，定理 1.19 の証明：次の脚注を追加：記号 “:=” は「左辺を右辺によって定義する」ということを表す.
- 講義ノート，第 II 節，13 ページ，定理 2.1 の証明の 2 行目：$|h| < \delta$ みたす ⇒ $|h| < \delta$ をみたす
- 講義ノート，第 II 節，15 ページ，定理 2.8 の 1 行目：$n + 1$ 回 ⇒ $n + 1$ 階
- 講義資料 2，2 ページの最後のコメントで，「特にないです」の返事が “me, too” ではおかしい “me, either” が正しい，というご指摘がありました．否定文は “me, too” で受けられないとのこと，ごもっともです．それでは「特にないです」と同じ意味をもつ英文で “me, too” で受けられるものは考えられるでしょうか（クイズ）.

授業に関する御意見

- $\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$ なんてどうでしょうか.　**山田のコメント：** いいね.
- かなり余白のあるスライドでも字が小さかったりするので，気力が失せてしまいます．プリントがあるとはいえ，そして字の大きさをかえるのが面倒とはいえ，直していただけると嬉しいです．この部分を発表している時間が退屈です.　**山田のコメント：** 前半：善処します．たとえば講義資料の「番号」を引用する形にします．後半：なぜ退屈？重要な情報をいっぱい垂れ流しているつもりですが.
- 金曜日を全て意見や質問に答える時間にするよりは，半分くらいを新しい範囲を進める時間にしてほしいと思いました.
  山田のコメント： 実は半分くらい新しいことを（質問に答える形で）やっているんですがね．月曜日に説明した部分の「穴」を埋めているはずで，それが「新しいところ」です．アクティブ・ラーニングは，受講者が事前に予習をして疑問点をもったところから始まる授業のはずです．数学では困難ですが，皆さんの質問を材料にしてやってみています．「アクティブ」な受講者はこのような形で情報を受け止めていく訓練が必要だと思います.
- 染レポ 18:00 締切の前に染レポの問題にあった $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ のやつをやってましたね．途中を省いているので，答えしか流出しなかったけれど. . .
  山田のコメント： なるほど．$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ のテイラー展開はどんな本にも書いてあるし，たいていの人は覚えているので，答えを知ったとしてもあまり価値のある情報じゃないですね.
- 少し証明に重きを置いて頂けるとありがたいです.　**山田のコメント：** たとえばどの定理の証明が必要でしょうか.（テイラーの定理の証明のしかたは前回紹介しましたね).
- スクリーンを使っていないときは教室の電気をつけてほしい.　**山田のコメント：** 気をつけます.
- 筆記体のアルファベットが何て書いてあるのか読み取りづらかったです.　**山田のコメント：** ごめんなさい．なんとか読めるようにしておいたほうがいいんですけどね.
- 誤字に厳しすぎてついていけません.　**山田のコメント：** なんで？ 正しい字を覚えるのがそんなに嫌?
- 数学でラテン語を読み書きできないと困る場面はありますか?
  山田のコメント： ほとんどないです．ガウスやオイラーの時代にはラテン語の文献もあったのですが．あたらしい概念に名前をつけるときに，ラテン語由来の単語とギリシア語由来の単語をまぜると気持ち悪い，と英語圏の人はいうようです．とはいっても日本の人も熟語をつくるのに「唐音」と「呉音」の区別をしていない（山田もできない）ですよね.
- 質問に対する解答が少し冷たい気がしたので，もう少しトゲのない答え方でお願いします.
  山田のコメント： 具体的にはどういうものでしょう．質問に答えている（質問になっていない言明には「答えられない」といっている）だけだと思うのですが.
- 上のやつ（山田注：質問）を TeX（山田注：正式には $\TeX$）にうちこむのが面倒でしたらうちこまなくても大丈夫です．プリントにのってなかったらききにいきます.
  山田のコメント： どうするかまだ決めてない.
- 熱があってよい授業.　**山田のコメント：** 熱，ありませんか？ 暑苦しくありませんか?
- 良い授業だと思っています（小並感）　**山田のコメント：** ありがとうございます（並）
- 7 回微分許せるかなー？（笑）/ 7 回も微分するのは大変な計算だと思う.
  山田のコメント： 必要ならやるしかない.
- ランダウ記号の使い方がようやく分かってよかった.　**山田のコメント：** よかった．これって分かりにくいですよね.
- 基本の説明の後に例題の解説をしてくださるのでとても助かっています．/ 例題も使っているので，問題の解き方のイメージがつかみやすいです.　**山田のコメント：** ですよね．普通だと思うんですが.
- 数学の面白さを授業でだんだん味わえてきました.　**山田のコメント：** 本当?
- ランダウの記号便利すぎる．今まで「ここから先関係ないだろ」「どうせ 0 にとぶだろ」と心の中で思っていたことを見事に記号化してくれている．証明を書くときも $o(x^n)$ の部分は具体的に計算しなくても良くなったからとてもラク．テイラー展開の意味がただの書き下ろしに見えなくなってきた!　**山田のコメント：** ですかね.

質問と回答

質問 1： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ にロピタルの定理を用いることが循環論法であるという内容に関して．そもそも $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ の導出にも扇形の面積や弧度法を用いており，面積や長さは積分で定義されるため循環論法である，ということを聞いたことがあるが，先生はどのように考えているのか教えてほしい.

お答え： 素朴には「循環論法」になりますが，そもそも “sin” をどう定義するか，というのが問題になりそうです．数学的に単純な定義は $\displaystyle\sin x := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$．任意の実数に対して右辺の級数は収束するので，これで関数が定義されます．すると，ご質問の極限は自明ですが，三角関数の周期性などを示すのはかえって難しくなります．高等学校で学んだような定義をもう少し厳密に直すことができますが，テクニカルになるので，ここでは説明しません.

質問 2： 最近，講義と演習の授業で $\sinh x$, $\cosh x$ を頻繁に見かけたんですが，$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ としか分からないので，その性質，図像，応用などを授業でもっと詳しく扱ってほしいのです．

お答え： 微分積分学第一の範囲だと思います．教科書 19 ページの問題 4，あるいは `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc1/lecture-01.pdf`

質問 3： 別の講義で $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を示すのに，e^x, $\sin x, \cos x$ のマクローリン展開を用いて示されていましたが，今のところマクローリン展開は実数の関数で成立とだけわかっています．最初の公式自体が実数の関数と複素数の関数を結びつけるものだという認識だったので違和感を感じ始めました．授業内容と少しそれますが，この公式の証明はマクローリン展開による証明でいいのでしょうか?

お答え： 複素数 w に対する指数関数 e^w をどう定義するかによります．(1) $w = x + iy$（x, y は実数）に対して $e^w := e^x(\cos y + i\sin y)$ と定める．このときご質問の式は定義そのもの．(2) $e^w := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k$ と定める．これは，マクローリン展開を拡大解釈したということになりますので，妥当な拡張と思えます．とくに w が純虚数のときにご質問の式が成り立つことを示すには，三角関数のマクローリン展開の式を使う必要がある．念のため，どちらの定義も同じ関数を定めています．

質問 4： 二項係数 $\binom{\alpha}{k}$ が α が実数の範囲に拡張されたが，$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!(\alpha-k)!}{k!}$ を展開した式を α が実数の範囲に拡張してよい理由が分かりません．

お答え： 「組み合わせ数」の表示式が間違っています．α が正の整数のときは $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$．これは $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)/k!$ と変形できるが，この式は α が正の整数でなくても意味がある．

質問 5： 二項係数の表記について，何の脈絡や補足もなしに書くとベクトルと見わけられないと思った．これを防ぐための工夫や表記のルールはありますか?

お答え： 必要なら「ただし...は二項係数である」と書けば良いが，文脈でわかることも多い：たとえば $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ なら x はスカラだから，左辺もスカラ．したがって右辺もスカラなので，$\binom{n}{k}$ はベクトルではない．

質問 6： 一般化された二項定理において，例えば $\alpha = \frac{3}{2}$ のときにパスカルの三角形は書けますか?

お答え： 難しい気がしますが．パスカルの三角形が書ける理由は補題 2.17 です．この補題自体は α が正の整数でなくても成立しますから，$\alpha = 1/2$ のときの二項係数から $\alpha = 3/2$ のときの二項係数を求めることはできます．

質問 7： $\frac{1}{1+x}$ の収束半径の話で「$-1 < x < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}\right|$ が $n \to \infty$ で収束する」とありました．ですが，$x = 1$ でも $|R_{n+1}|$ は収束します（$\because \left|\frac{1}{(1+\theta)^{n+2})}\right|$ は $(1+\theta) > 1$ より)．（以下略）

お答え： いいえ． $x = 1$ のとき $R_{n+1}(1)$ は $n \to \infty$ のときに 0 に収束しません．注意すべきことは，θ が x と n に依存することです．実際，$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + R_{n+1}(x)$, $R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}} x^{n+1}$ とおくと，$x = 1$ のとき $\theta = 2^{1/(n+2)} - 1$ となります．すなわち n が大きくなると θ は 0 に近づきます．

質問 8： $|R_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \to 0$（中略）の件，if $0 \leqq x < 1$ というのは理解できたのですが，なぜ if $-1 < x < 0$ でもあるのかがわかりませんでした． **お答え：**はい，講義では説明していませんでした．今回少し説明します．

質問 9： 講義資料の p 16 の例 2.9 にの (2.7) において，テイラーの定理 1.19 をそのままの形で適用するならば θ_n より θ の方が適切でないかと思った．（補題 2.22 ではテイラーの定理 1.19 を適用した際に θ をそのままつかっているので，(2.7) であえて θ_n を使った理由を知りたい．

お答え： 定理 1.19 は与えられた一つの n に対する言明だが，例 2.9 では「すべての n に対して」テイラーの定理を適用しています．θ の値は x や n に依存する（ここでは x は固定しているので n に依存する）ので，そのことを明示するために θ_n と書きました．補題 2.22 も同じ状況なのですが，一度注意したので省略しました．

質問 10： テーラー展開において，$\sum_{k=0}$ とすると不適な場合がありそうです．例えば $(k-1)!$ が含まれる関数に $\sum_{k=0}$ をとると $(-1)!$ が出てきます．$(-1)!$ の定義は自分は理解していないのでどう処理するのか知りたいです．

お答え： $(k-2)!$ が出てきたら $k = 0$ だけでなく $k = 1$ も気になりますね．テイラーの定理を適用する状況では原理的に $(-1)!$ はでてきません（$f^{(k)}(a)/k!$ のどのへんから出て来ると思われますか?)．ちなみに，$(-1)!$ は定義されません．階乗を連続化した「ガンマ関数」（前期に学んだと思います）が発散する点でもあります．

質問 11： $n \geqq 0$ で定義された数列 $\{a_n\}$ があり，一般項が一通りの n の式であらわされているとして，そのような数列 $\{a_n\}$ を使った $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ の無限級数と等しくなる関数 $f(x)$ は $\{a_n\}$ が何であれ存在するのでしょうか．例えば $a_n = \frac{1}{n!}$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ は e^x と等しくなるというような感じで，ある $\{a_n\}$ に対応する関数は常に存在するのかということです．

お答え： $\{a_n\}$ に対して集合 $I := \{x \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は収束する $\}$ を考えると，I の各要素 x に対して，$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ となる実数がひとつ定まります．すなわち f は I 上で定義した関数を与えています．(関数の定義は「式で表される」ではなく「対応関係」であることを思い出しましょう．ご質問の「一通りの n の式」というフレーズから多少混乱しているように感じますが，式で表されることは本質ではありません)．さて，あきらかに 0 は I の要素ですが，I が 0 以外の要素を含む場合が面白いはず．$\{a_n\}$ に対して I がどのように定まるかは，第 VI 節（冪級数）の項で扱います．

質問 12： 任意の n に対して x^n より速いオーダーで 0 に近付く関数は存在しますか? 暫く考えましたがわかりませんでした． **お答え：**ヒントは例 2.13．f の任意階数の微分係数が 0 であるからご質問の性質を満たしていますね．

質問 13： 任意の n で $f^{(n)}(0) = 0$ かつ C^∞ 級の関数が，$\exists x\ f(x) \neq 0$ であるようすは想像もつきません．どのようなグラフになる関数なのでしょうか? **お答え：**講義ノートの例 2.13 がその関数．グラフは図 2.1.

質問 14： 結局，どうして $R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)h^n$ と表すんですか?

お答え： どういう回答を期待しているのかわかりませんが,「こう書ける」と言っているだけです.

質問 15： 演習でコーシーの剰余項とラグランジュの剰余項があると教わりましたが，この 2 つの違いは何ですか? また，なぜ 2 つ存在しているのですか?

質問 16： テーラーの定理での剰余項がコーシーの剰余項とラグランジュの剰余項で違いがあるのか.

お答え： 講義で説明したように，テイラーの定理は「剰余項が然るべき形でかける」という定理です．同じものが何通りもの形に書けるのは普通ですよね．そして講義では一言だけしか言及していませんが「積分剰余項」というものもあります（定理 2.8)．これで 3 つ．原理的にはいくらでも表示があるわけで，考える問題に応じて利用すればよいわけです．とはいえ，近似や極限のオーダーを大雑把に測るだけならどの表示をつかっても同じです.

質問 17： テーラーの定理において剰余項を書くときに，コーシーの剰余項とラグランジュの剰余項のどちらを使えばいいかなどありますか? **お答え：**「など」は何を表しますか? いろいろと試して使えるものを採用する.

質問 18： 解析関数のところで，$P_k(t)$ は t の多項式で，なぜ帰納的に $P_{k+1}(t) = t^2 P_k(t) - P_k'(t)$ となるのか分からない． **お答え：**例 2.13 のこと?$P_k(1/x)e^{-1/x}$ を x で微分すればわかる.

質問 19： $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1+x}$ (if $|x| < 1$) としましたが，$x = 0$ かつ $k = 0$ のとき 0^0 が出て不定形となるため「if $0 < |x| < 1$」ときのみの定義だと思っていたのですがちがいますか?

お答え： だからこういう文脈では「x^0 は $x = 0$ のときも 1 と見なす」という説明を講義で複数回しています.

質問 20： 無限回微分できる → 任意の n で微分できる．この言い換えがすごくかっこいいと思った．これが数学哲学?

お答え： 正確には「C^∞-級とは，任意の正の整数 n にたいして C^n-級であること」ですね.「n で微分する」のはちょっと.... 哲学ではなく普通の数学です．余談ですが，日常会話の文脈で「哲学」というと「ややこしいもの」というニュアンスであることが多いようです．Hugo Hoffmansthal の Die Rosenkavalier (薔薇の騎士，オペラ作曲は Richard Strauss) の第 1 幕で Marschalin が Octavian に "Philosophir Er nicht" と語りますが，文脈は「めんどうくさいことを言わないで」という感じです（新国立劇場の字幕はそんな感じだった)．ドイツ語圏でも「哲学」はめんどくさいものなんでしょうかね.

質問 21：「:=」と「=」の違いを教えて下さい． **お答え：**ごめんなさい．講義ノートに説明を付け忘れていました.「$A := B$」は「A を B で定義する」の意味で使っています（それほど一般的な記号ではありません).

質問 22： 授業とあまり関係がなくなってしまうのだが，ラージ・オーについても詳しく説明してほしい．(授業でスモール・オーが出てきたので).

お答え： 定義が「面倒」なのでここでは扱わない，と述べたと思いますが．a を含む開区間を含む区間 I から a を除いた点で定義された関数 f, g に対して $|f(x)/g(x)|$ が a の近くで有界，すなわち，正の数 ε と M で，$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ かつ $x \neq a$ をみたす任意の x に対して $|f(x)/g(x)| \leqq M$ が成り立つときに $f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ と表す．定義から $x \to a$ としたときの $f(x)/g(x)$ の極限値が存在する（0 でなくてもよい）ならば $f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ となります．テイラーの定理（定理 2.1）の状況なら $R_{n+1}(h) = O(h^{n+1})$ になります.

質問 23： ラージ・オーの定義は次のようだと思います．(略：質問 22 の回答参照）この定義を使って $\lim_{n\to\infty} \dfrac{O(x^n)}{x^n}$ が収束することを示すにはどうすればよいのでしょうか.

お答え： $n \to \infty$ では意味がないのでは? $x \to a$ のときでも収束するとは限りません．たとえば $(-x)^n$ は $x \to 0$ で $O(x^n)$ ですが，$x \to 0$ で $(-x)^n/x^n$ は収束しません.

質問 24： ランダウの記号についてですが，o については講義および資料 p14 で説明されていたのでわかりました．O については，調べてみたのですが n（負でない整数）を用いて $x \to a$ のとき $f(x) = O(x^n)$ となる $f(x)$ はある定数 C を用いて Cx^n で近似できるという解釈でよいでしょうか．また講義資料で載せていない理由は何かあるのでしょうか． **お答え：**ご質問の状況は「$x \to a$」ではなく「$x \to 0$」．質問 22 の回答のように必ずしも Cx^n で近似できるとは限りません．定義が面倒で，この段階で無理に導入しても当面使わないので，扱いませんでした．

質問 25： 演習の授業でラージ O が出てきたのですが，授業では飛ばすと言っていましたがよくわかっていないので説明してほしいです． **お答え：**質問 22 の回答参照

質問 26： OCW のシラバスと異なり，極限の問題が後回しになっているのはなぜですか．

お答え： そこまで気を使わなくてもできることは先に片付けたい．

質問 27： 資料 p 23 問題 II-2 ではテイラー展開を用いますが，テストなどで記述する際には，どこまで丁寧に書けばよいでしょうか．知っておくべきテイラー展開とかはそのまま導出なしに書いてよいのでしょうか． **お答え：**過去問を見てほしい．基本的に「答え」だけを見ますが，その「答え」には途中の計算も含むように誘導します．

質問 28： $o(x^5)/x^5$ $(x \to 0)$ はなぜゼロになるのですか? **お答え：**記号 $o(\cdot)$ の定義は?

質問 29： $f(x) = 1/(1 + x)$ のテイラーの定理で（山田注：文がおかしいと思います）$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ を求めたときの $-1 < x < 0$ と $0 \leqq x < 1$ の仮定は剰余項をなくすためのものですか?

お答え： 剰余項 $R_{n+1}(x)$ の $n \to \infty$ としたときの極限が 0 となることを示すのに，二つの場合で手法が異なる（一方は講義で説明していない）ということです．

質問 30： テーラーの定理とかは，結局近似する手段として重要なのでしょうか? 現実的に考えれば，無理数も有理数のようにあつかわないといけないのでしょうか．

お答え： 前半：「とか」の意味がわからないので，ご質問の意図が取れません．後半：状況がよく理解できていないのですが，前半からの帰結として後半がでてくるのはなぜ？余談：実数って現実的な数なんでしょうか．

質問 31： ランダウ記号と剰余項の使い分けの判断がむずかしいと思った． **お答え：**そうですか．

質問 32： ランダウの記号はこれ以外の単元で役立つことはありますか? **お答え：**「単元」というと「授業の中から出れない」みたいで嫌ですね．極限や近似を扱うさまざまな場面で自然に出てきます．(だからこの「単元」で扱っている．あまりよい記号ではないので数学の文脈で扱うのは不自然なのかもしれませんが)．

質問 33： 極限の求め方は板書やプリントの説明では理解できるが，自分で求めろと言われたら苦しい気がする．自力でできるようにするべきか． **お答え：**講義ノートの問題 II-2, II-3 くらいは自力でできてください．

質問 34： 前々回ほどの授業で，テーラーの定理が平均値の定理の拡張という事を教えていただいた．平均値の定理は直感的に理解できるのであるが，テーラーの定理はできない．何か良い方法を教えて下さい．

お答え： 無理に直感的に理解する必要はあるでしょうか．たぶん，様々な計算をやってみると体感できると思います．

質問 35： テーラー展開のやり方がイマイチ上手くできないです． **お答え：**そうですか（としか答えようがない)．

質問 36： 解析関数の部分で実解析的とありますがいまいちイメージがつかめないです． **お答え：**そうですか．

質問 37： 講義ノートの最後にある問題の解答は公開されますか? はやくみたい! **お答え：**もうでています．探して！

質問 38： 誤りを見つけられなかったのですが，この提出用紙を出したことにしていただけますか?

お答え： 確かにでていますので「出した」ことにはなっています．評価は 0 点です．

質問 39： 勉強がたりておらず，いまのところ質問はないです．(下で偉そうなことを言っておきながらすみません)

お答え： 偉そうなことはどんどん言ってください．

質問 40： 特にないです．(2 件) **お答え：**そうですか．

質問 41： $\sin x$ と $\cos x$ のテイラー展開は $\sin x$ だけ覚えとけばラクではないでしょうか? $\cos x$ は忘れたら微分しちゃえばすぐ出てきます． **お答え：**やっているとすぐおぼえられる．$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ 位は知っておくべき．

質問 42： $\mathrm{Tan}^{-1} x$ のテイラー展開は染レポの課題だったので，ネタバレ感すごかったです．もう少し自力で考えたかった．染レポは先生のもとに届いているのでしょうか？まあ $\frac{1}{1+x^2}$ をテイラー展開して積分して戻すという発想は思いつきそうになかったので助かりましたが（笑）たとえば $\mathrm{Tan}^{-1} x$ のように $f(x)$ をテイラー展開したとして $f'(x)$ がテイラー展開できたとします．このとき積分して求めるとき，剰余項 R_n ($f'(x)$ の）を積分した項も $n \to \infty$ で 0 に収束することはその都度確かめる必要がありますか．

お答え： 前半：ぶっちゃけた話こうすると出てきて，実は答えは正しい，とは申しあげましたが，これが証明になるとは一言も言っていないので注意．後半：まったく自明でないです．したがって $1/(1 + x^2)$ のテイラー展開をしっていても，各項積分して $\mathrm{Tan}^{-1} x$ のテイラー展開が出て来るというのは自明でないです（実はだいたい大丈夫，ということを第 VI 週でやる)．「収束半径」と「項別積分」という言葉が必要．