

4.1.4 多面体のホモロジー

順序単体複体 K の多面体 $|K|$ は, 順序 n -単体 $s \in K$ に対し, 開単体 \mathring{s} を cell とし, s の定める線型 n -単体 $\sigma_s : \Delta^n \rightarrow s$, $\sigma_s(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ をその特性写像とする CW 複体で, その有向 n -胞体 $\sigma_{s^*}(\mathbf{i}^n) \in \mathcal{C}_n(|K|) := H_n(|K|^n, |K|^{n-1})$ ($\mathbf{i}^n = [1_{\Delta^n}]$) を $[s]$ と表せば $\partial^i \sigma_s$ は $\partial^i s$ の特性写像なので

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n(|K|) &= \mathbb{Z}\langle [s] \mid s \in K_n \rangle \cong \mathbb{Z}\langle K_n \rangle = \mathcal{C}_n(K) \\ \partial_n [s] &= \partial_*(\sigma_{s^*}(\mathbf{i}^n)) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\partial^i \sigma_s)_*(\mathbf{i}^{n-1}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial^i s] \in \mathcal{C}_{n-1}(|K|) = H_{n-1}(|K|^{n-1}, |K|^{n-2}) \end{aligned}$$

従って多面体 $|K|$ の胞体的 chain complex と順序単体複体 K の chain complex は有向胞体と有向単体を同一視すれば一致する. (そこで有向 n -胞体 $[s]$ も **有向 n -単体** ということにする.) 従って多面体の, 特異ホモロジー群, 胞体的ホモロジー群, 順序単体複体のホモロジー群は**全て同型**になる.

次に単体の頂点の順序を変えたとき, 即ち π を $0, \dots, n$ の置換とし $s_\pi := a_{\pi(0)} \cdots a_{\pi(n)}$ とするとき σ_{s_π} も $|\mathring{s}|$ の特性写像なので $[s_\pi] = \pm [s] \in \mathcal{C}_n(|K|)$ だが,

補題 4.1.8 (置換) 置換 π に対し $[s_\pi] = (\text{sgn } \pi)[s] \in \mathcal{C}_n(|K|)$.

証明 n -単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n \in K$ の頂点の, 重複を許した順列 $s' = v_0 v_1 \cdots v_m$ の定める線型 m -単体 $\sigma_{s'}$ ($\sigma_{s'}(\sum_i t_i e_i) = \sum_i t_i v_i$) を $(s') = (v_0 v_1 \cdots v_m)$ と表す事にする. $m=n$ のとき s' に重複があれば $\sigma_{s'}(\Delta^n) \subset |K|^{n-1}$ より

$$(s') = 0 \in \mathcal{C}_n(|K|^n, |K|^{n-1}) = \mathcal{C}_n(|K|^n) / \mathcal{C}_n(|K|^{n-1}), \quad \therefore [s'] = 0 \in H_n(|K|^n, |K|^{n-1}).$$

重複がないとき, 隣接互換 $\tau_i = (i, i+1)$ に対し線型 $(n+1)$ 単体 $(s'') := (v_0 \cdots v_i v_{i+1} v_i v_{i+2} \cdots v_n)$ を考える:

$$\partial_{n+1}(s'') = (-1)^i (\cdots \check{v}_i v_{i+1} v_i v_{i+2} \cdots) + (-1)^{i+2} (\cdots v_i v_{i+1} \check{v}_i v_{i+2} \cdots) + c = (-1)^i ((s'_{\tau_i}) + (s')) + c$$

ここで $c = \sum_{j \neq i, i+2} (-1)^j \partial^j (s'') \in \mathcal{C}_n(|K|^{n-1})$. $\therefore (s'_{\tau_i}) + (s') = (-1)^i \partial_{n+1}(s'') \in B_n(|K|^n, |K|^{n-1})$ より

$$[s'_{\tau_i}] = -[s'] \in H_n(|K|^n, |K|^{n-1}) = \mathcal{C}_n(|K|)$$

s' はある置換 π' により $s' = s_{\pi'}$ と表され, $s'_{\tau_i} = s_{\pi' \tau_i}$ より $[s_{\pi' \tau_i}] = -[s_{\pi'}]$. 置換は隣接互換の積で表されるので帰納的に $[s_\pi] = (\text{sgn } \pi)[s]$ が成り立つ. \square

従って, 順序単体の定める有向単体と, 線形単体としての $H_n(|s|, \partial|s|)$ や $\mathcal{C}_n(K) = H_n(|K|^n, |K|^{n-1})$ でのホモロジー類が一致し, 幾何単体 $|s|$ に順序や向きをつけることと, 胞体 $|\mathring{s}|$ に向きをつけることに対応し, 単体複体の chain complex と胞体的 chain complex は同一視できる. 以上より, 単体複体のホモロジー群は特異ホモロジー群を用いて構成できる事が分かり, 次が示された.

定理 4.1.9 (単体複体対のホモロジー群の位相不変性) (X, A) が単体分割可能な位相空間対で $((K, L), f : (|K|, |L|) \approx (X, A))$ をその単体分割とすると, 単体複体のホモロジー群 $H_n(K, L)$ と特異ホモロジー群 $H_n(X, A)$ は同型:

$$H_n(K, L) \cong H_n(|K|, |L|) \xrightarrow{f_*} H_n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

従って $H_n(K, L)$ は単体分割の取り方によらず全て同型になる.

特に K が順序単体複体のときは, 各順序単体 $s \in K$ の face $\partial^i s$ の順序が s から定まっていることにより, $\rho = \{\rho_n\}$, $\rho_n : \mathcal{C}_n(K) \rightarrow \mathcal{C}_n(|K|)$, $\rho_n(s) = \sigma_s$ が chain map になる. このとき

命題 4.1.10 $\rho : \mathcal{C}_*(K, L) \rightarrow \mathcal{C}_*(|K|, |L|)$ はホモロジー群の同型を誘導する.

$$\rho_* : H_n(K, L) \rightarrow H_n(|K|, |L|) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(自由加群の chain complex 間の chain map がホモロジー群の同型を誘導するので chain 同値になる.)

証明 $H_n(K, L) \xrightarrow{\rho_*} H_n(|K|, |L|) \cong H_n(\mathcal{C}_*(K, L))$ において代表元 $[z] \in H_n(K, L)$, $z = \sum_i m_i s_i \in \mathcal{C}_n(K)$ の像は $\theta^{-1}(\sum_i m_i \sigma_{s_i}) = \pi(j_n i_n^{-1}(\sum_i m_i \sigma_{s_i})) = \pi(\sum_i m_i \sigma_{s_i}) = [\sum_i m_i \sigma_{s_i^*}(\mathbf{i}^n)] = [\sum_i m_i [s_i]]$, $\sum_i m_i [s_i] \in Z_n(\mathcal{C}_*(K, L))$ i_n, j_n は値域を変え, 剰余の取り方を変えるだけであり, $\mathcal{C}_*(K, L)$ と $\mathcal{C}_*(|K|, |L|)$ は同一視されるので定理が成り立つ.

4.2 胞体分割の例

ここでは幾つかの典型的空間の胞体分割と \mathbb{Z} -係数胞体的鎖複体 $\mathcal{C} = \{C_n, \partial_n\}$, 及び整係数ホモロジー群を与える. 以下, n -cell を e^n , 同次元に複数あるときは e_1^n, e_2^n, \dots 等と表し, 有向 n -cell やホモロジー類も同じ記号で表す. $C_n = \mathbb{Z}\langle e_1^n, e_2^n, \dots \rangle$ なので境界作用素 $\partial = \partial_n$ が与えられれば \mathcal{C} は定まる. 特に, $C_i = H_i = 0$ ($i < 0, i > \dim$).

例 1 (射影空間)

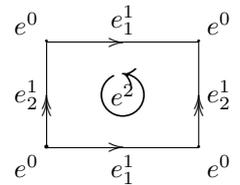
例 1.1 (複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$) $e^0 = \mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{C}P^n$. $e^{2k} = \mathbb{C}P^k - \mathbb{C}P^{k-1}$ より $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$. e^{2k} の特性写像は $\phi_{k+} : (B^{2k}, S^{2k-1}) \rightarrow (\mathbb{C}P^k, \mathbb{C}P^{k-1})$, $\phi_k(x) = [x, \sqrt{1-|x|^2}]$. ($\tilde{\phi}_{2k+}(x) = (x, \sqrt{1-|x|^2}) \in S_+^{2k+1}$)
 $\mathcal{C}(\mathbb{C}P^n) : C_{2k} = \mathbb{Z}\langle e^{2k} \rangle$ ($k = 0, 1, \dots, n$), その他 = 0. 特に $C_{2k-1} = 0$ より $\forall \partial = 0$. $\therefore H_i = C_i$ ($\forall i$)
 $H_{2k}(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}\langle e^{2k} \rangle$, その他 = 0.

例 1.2 (実射影空間 $\mathbb{R}P^n$) $\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^n$, $e^k = \mathbb{R}P^k - \mathbb{R}P^{k-1}$, $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$.
 $\phi_k : (B^k, S^{k-1}) \rightarrow (\mathbb{R}P^k, \mathbb{R}P^{k-1})$, $\phi_k(x) = [x, \sqrt{1-|x|^2}]$ ($\tilde{\phi}_{k+}(x) \in S_+^k$). $C_k = \mathbb{Z}\langle e^k \rangle$ ($0 \leq k \leq n$), その他 = 0.
 $\partial e^k = (1 + (-1)^k)e^{k-1}$ $\therefore \partial e^{2i} = 2e^{2i-1}$ ($i \geq 1$), $\partial e^{2i-1} = 0$ \dots (*)
 $H_k = H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$ は, $H_{2i} = 0$ ($1 \leq 2i \leq n$), $H_{2i-1} \cong \mathbb{Z}_2$ ($1 \leq 2i-1 < n$), $H_0 \cong \mathbb{Z}$, $H_n \cong \mathbb{Z}$ ($2i-1 = n$).
 即ち, $k = 0, 1, 2, \dots$ に応じて $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}_2, 0, \dots$ で, $n =$ 奇数のとき $H_n \cong \mathbb{Z}$, $n =$ 偶数のとき $H_n = 0$.

例 2 (曲面) B^2 から多角形への (向きを保つ) 同相写像 h を定めておき, 辺を張り合わせて曲面 Σ を構成する. (h^{-1} は多角形の周上の点 x に $x/|x|$ を対応させ, 内部に拡張した同相写像 $tx \rightarrow tx/|x|$ ($0 \leq t \leq 1$). e^2 の特性写像は h と射影の合成, e_i^1 の特性写像は B^1 と辺の間の同相写像に射影を合成したもの.)

例 2.1 (2次元トーラス T^2) $T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$. $C_2 = \mathbb{Z}\langle e^2 \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1^1, e_2^1 \rangle$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle$.
 $\partial e^2 = e_1^1 + e_2^1 - e_1^1 - e_2^1 = 0$, $\partial e_1^1 = \partial e_2^1 = e^0 - e^0 = 0$, $\partial e^0 = 0$. $\therefore \forall \partial = 0$, $H_i = C_i$ ($\forall i$).

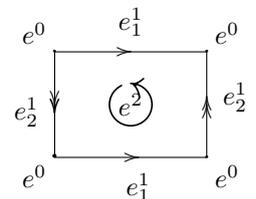
$$H_i(T^2; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0, 2) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (i=1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



例 2.2 (Klein bottle KB) $KB = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$. $C_2 = \mathbb{Z}\langle e^2 \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1^1, e_2^1 \rangle$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle$.

$\partial e^2 = e_1^1 + e_2^1 - e_1^1 + e_2^1 = 2e_2^1$, $\partial e_1^1 = \partial e_2^1 = e^0 - e^0 = 0$, $\partial e^0 = 0$.
 $Z_2 = H_2 = 0$, $Z_1 = C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1^1, e_2^1 \rangle$, $B_1 = 2\mathbb{Z}\langle e_2^1 \rangle$, $\therefore H_1 = \mathbb{Z}\langle e_1^1 \rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle e_2^1 \rangle$. $H_0 = C_0$,

$$H_i(KB; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & (i=1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



例 2.3 (閉曲面のホモロジー群)

種数 (genus) g の向き付け可能な閉曲面 Σ_g ($g \geq 1$) は, 正 $4g$ 角形の辺を図の様に, 1 つおきに 2 つずつ同一視することにより得られる. このとき, 全ての頂点は 1 点 e^0 に同一視される. $2g$ 個の 1-cell を $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ と表すと,

$C_2 = \mathbb{Z}\langle e^2 \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \rangle$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle e^0 \rangle$,
 $\partial e^2 = \sum_{i=1}^g (a_i + b_i - a_i - b_i) = 0$, $\partial a_i = \partial b_i = e^0 - e^0 = 0$. $\therefore \forall \partial = 0$, $H_k = C_k$ ($\forall k$)

$$H_i(\Sigma_g; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i=0, 2) \\ \mathbb{Z}^{2g} & (i=1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

