

CW 複体

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ を n 次元単位閉球体, $\mathring{B}^n$ を内部の単位開球体,

$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ を境界である $(n-1)$ 次元単位球面 $S^{n-1} = \partial B^n$ とする.

位相空間 X の部分空間 e に対し, $\bar{e}$ をその閉包, $\dot{e} = \partial e := \bar{e} - e$ (境界) とする.

全射連続写像 $\phi: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}, \partial e)$ ($\phi(S^{n-1}) = \partial e$) で, $\phi|: \mathring{B}^n \rightarrow e$ が同相となるものが存在するとき, e を X の n 次元胞体 (cell) 又は単に n -胞体 (n -cell), $\bar{e}$ を閉胞体 (closed cell), $\dot{e} = \partial e$ を e の境界, ϕ を特性写像 (characteristic map) という. e は開胞体 (open cell) ともいい, 次元を明示して e^n と表す.

($\phi: B^n \rightarrow X$ が連続で $\phi: \mathring{B}^n \rightarrow e$ が同相なら, $\phi(B^n) \subset \bar{e}$ かつ $\phi(B^n)$ はコンパクト. X が Hausdorff 空間のときは $\phi(B^n)$ 閉より $\phi(B^n) = \bar{e}$ が得られるので, $\phi: B^n \rightarrow \bar{e}$ の全射性は明示されていないこともある.)

n -単体 Δ^n や n 次元立方体 I^n は閉球体 B^n と同相なので, B^n を Δ^n や I^n で置き換えてもよい.

位相空間 X の胞体の (ある) 集合 $D = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が次をみたすとき D を X の胞体分割 (セル分割) という:

(i) $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$ ($e_\lambda \cap e_\mu = \emptyset$ ($\lambda \neq \mu$)).

(ii) $X^n := \cup \{e_\lambda \in D \mid \dim e_\lambda \leq n\}$ とするとき $\partial e_\lambda^n \subset X^{n-1}$. X^n を X の n -切片 (skeleton, 骨格) という.

Hausdorff (T_2) 空間 X に胞体分割 D が与えられたとき $X = (X, D)$ を胞複体 (cell complex) という. 胞体数が有限のとき X は有限 ((胞) 複体) であるという. $\max_{\lambda \in \Lambda} \dim e_\lambda$ が存在するとき, これを X の次元とし, $\dim X$ と表す. そうでないときは X は無限次元 ($\dim X = \infty$) とする.

胞複体 $X = (X, D)$ の部分空間 $A \subset X$ が, $e \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \bar{e} \subset A$ ($e \in D$) をみたすとき, $D_A := \{e \in D \mid e \subset A\} = \{e \mid e \cap A \neq \emptyset\}$ は A の胞体分割になる. この胞複体 $A = (A, D_A)$ を X の部分複体 (subcomplex) という. 定義より部分複体の和集合, 共通部分も部分複体になる.

胞複体 $X = (X, D)$ が次の条件 (C), (W) をみたすとき X を CW 複体 (CW complex) という:

(C) (閉包有限 (closure finite)) $e \in D$ に対し, 閉包 $\bar{e}$ はある有限部分複体に含まれる.

(W) (弱位相 (weak topology)) X は閉被覆 $\{\bar{e} \mid e \in D\}$ に関し弱位相をもつ, 即ち

• $F \cap \bar{e}$ は $\bar{e}$ の (相対) 閉集合 ($e \in D$) $\Leftrightarrow F$ は X の閉集合. (相対閉集合=相対位相による閉集合)

($\Rightarrow$ が条件. $\bar{e}$ は compact 閉集合で, $\bar{e}$ の (相対) 閉集合は X の閉集合になる.)

有限胞複体 X は (C),(W) をみたすので CW 複体であり, $X = \cup \{\bar{e} \mid e \in D\}$ (有限和) より compact.

単体複体 K の多面体 $|K|$ は開単体 ($\mathring{s} := |s| - \partial|s|$ ($s \in K$)) を胞体 (単体を閉胞体) とする CW 複体になる.

(K が無限でも, 局所有限性から (W) が出る.) 位相空間 X に単体分割 (K, f) が与えられたとき, X は $D := \{f(\mathring{s}) \mid s \in K\}$ を胞体分割とする CW 複体になる.

CW 複体は単体複体よりも条件が緩いので, 単体分割における単体の個数に比べ胞体の個数が少ない胞体分割が取れる事が多い.

CW 複体の例 (1)(球面) $S^n = e^0 \cup e^n$, $S^n = e_+^0 \cup e_-^0 \cup e_+^1 \cup e_-^1 \cup \dots \cup e_+^n \cup e_-^n$ (e_+^i, e_-^i は上下半球面).

(トーラス) $T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$. (Klein bottle も同様.) (向き付け可能閉曲面) $\Sigma_g = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_{2g}^1 \cup e^2$.

実射影空間 $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$, $e^i = \mathbb{R}P^i - \mathbb{R}P^{i-1}$,

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n = e^0 \cup e^2 \cup \dots \cup e^{2n}$, $e^{2i} = \mathbb{C}P^i - \mathbb{C}P^{i-1}$,

閉被覆に関する弱位相について

• (W) は次と同値: $\forall$ 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 各 $f|_{\bar{e}_\lambda}$ ($\lambda \in \Lambda$) が連続 $\Leftrightarrow f$ が連続. ($\Rightarrow$ を示す)

($\Leftarrow$) (W) を仮定. $F \subset Y$ を閉集合とする. 各 $\bar{e}_\lambda$ に対し, $F_\lambda := f^{-1}(F) \cap \bar{e}_\lambda = (f|_{\bar{e}_\lambda})^{-1}(F)$ の右辺は $\bar{e}_\lambda$ の閉集合なので (W) より $f^{-1}(F)$ は X の閉集合. 逆は, (W) による位相を入れた X を X_W とし, $f = 1_X: X \rightarrow X_W$ とすればよい.

CW 複体の位相

胞複体 $X = (X, D)$ $D = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の各特性写像 $\phi_\lambda: B^n \rightarrow \bar{e}_\lambda \subset X$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し, B^n のコピー $B_\lambda^n (= B^n \times \{\lambda\})$ を作り ϕ_λ を $\phi_\lambda: B_\lambda^n \rightarrow X$ と見なししておく. $\tilde{X}$ をこれらの和空間 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^n$ とする.

$\Lambda_n := \{\lambda \in \Lambda \mid \dim e_\lambda = n\}$ とすると $\tilde{X} = \coprod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda^n = \coprod_{n=0}^\infty \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} B_\lambda^n (= \coprod_{n=0}^\infty B^n \times \Lambda_n, \Lambda_n \text{ は離散})$.

"big characteristic map" $\Phi: \tilde{X} \rightarrow X$ を $\Phi|_{B_\lambda^n} = \phi_\lambda$ で定めると連続.

• 胞複体 X に対し, (W) $\Leftrightarrow \Phi: \tilde{X} \rightarrow X$ は商写像.

$\therefore X$ が CW 複体 $\Rightarrow \Phi$ は商写像. X が閉包有限で Φ による商位相をもてば X は CW 複体.

($\because$) $F \subset X$ とする. ($\Rightarrow$) $\Phi^{-1}(F)$ 閉として F 閉を示す. 各 λ に対し, $B_\lambda^n \cap \Phi^{-1}(F)$ は B_λ^n の閉, $\therefore$ compact. $B_\lambda^n \cap \Phi^{-1}(F) = \phi_\lambda^{-1}(F)$ と $F \cap \bar{e}_\lambda = \phi_\lambda(\phi_\lambda^{-1}(F))$ compact より $F \cap \bar{e}_\lambda$ は $\bar{e}_\lambda$ の閉. $\therefore$ (W) より F は閉.
($\Leftarrow$) $\forall F \cap \bar{e}_\lambda$ 閉 とすると, $B_\lambda^n \cap \Phi^{-1}(F) = \phi_\lambda^{-1}(F \cap \bar{e}_\lambda)$ は B_λ^n の閉より $\Phi^{-1}(F)$ は閉. 商位相より F は閉.
•(1) 写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 各特性写像 $\phi_\lambda: B^n \rightarrow X$ との合成写像 $f \circ \phi_\lambda$ が連続ならば連続.
(後半) $\phi_\lambda: B^n \rightarrow \bar{e}_\lambda$ は全射なので, $F_\lambda = \phi_\lambda(\phi_\lambda^{-1}(F_\lambda)) = \phi_\lambda((f \circ \phi_\lambda)^{-1}(F))$. $(f \circ \phi_\lambda)^{-1}(F)$ は B^n の閉集合より compact, $\therefore F_\lambda = \phi_\lambda((f \circ \phi_\lambda)^{-1}(F))$ もそう. X が T_2 より F_λ は閉で同上. (後半を言い換えると, $\phi_\lambda: B^n \rightarrow \bar{e}_\lambda$ は compact から T_2 への全射なので閉写像で商写像になることによる.)

(1) は, 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ を, X^0 から帰納的に構成する際に用いられる. (X^0 は離散空間.)

•(2) CW 複体 X の compact 集合 C は有限部分複体に含まれる. 特に, compact 部分複体は有限複体.

($\because$) $\Lambda' := \{\lambda \in \Lambda \mid e_\lambda \cap C \neq \emptyset\}$ として 各 $\lambda \in \Lambda'$ に対し, 点 $p_\lambda \in e_\lambda \cap C$ を一つずつ選んで $P := \{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$ とし, P が離散空間になることを示す. $M \subset P$ に対し, $M \cap \bar{e}_\lambda$ は (C) より高々有限個の点 ($\lambda \in \Lambda$), $\therefore$ (W) より M は X の閉集合. 任意の M が閉より P は離散的で, 特に P 自体も X の閉集合. $\therefore P$ は C の閉集合より compact. $\therefore P$ は compact 離散より有限集合で Λ' もそう. $\therefore C \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \bar{e}_\lambda \subset$ 有限部分複体の有限和.

•(3) 部分複体 A は閉集合, 特に n -切片 X^n は閉集合.

($\because$) 各 $e \in D$ に対し, $\bar{e} \subset F$ となる有限部分複体 F をとると $A \cap F$ は有限部分複体なので compact. $A \cap \bar{e} = A \cap F \cap \bar{e}$ は $A \cap F$ の相対閉集合より compact, $\therefore \bar{e}$ の閉集合. (W) より A は X の閉集合.

• 胞複体 (X, D) , (Y, D') の積空間は $D \times D' := \{e \times e' \mid e \in D, e' \in D'\}$ を胞体分割とする胞複体. $e \times e'$ の特性写像は, $\phi: B^m \rightarrow \bar{e}$, $\psi: B^n \rightarrow \bar{e}'$ と同相 $B^{m+n} \approx B^m \times B^n$ により, $B^{m+n} \approx B^m \times B^n \xrightarrow{\phi \times \psi} \bar{e} \times \bar{e}'$.

(X, D) , (Y, D') が閉包有限なら $(X \times Y, D \times D')$ もそう.

胞複体 (X, D) は, 各点が有限部分複体である近傍をもつとき**局所有限**という. このとき局所 compact.

補題 X 局所 compact T_2 , $p: Y \rightarrow Z$ 商写像なら $p \times 1: Y \times X \rightarrow Z \times X$ も商写像.

($\because$) $B \subset Z \times X$, $A := (p \times 1)^{-1}(B)$ 開とし, B 開を示す, 即ち, $(z, x) \in B$, $y \in p^{-1}(z)$ に対し, 開近傍 $y \in U \subset Y$, $x \in V \subset X$ で $p^{-1}(p(U)) = U$ ($\because p(U)$ は開), $p(U) \times V \subset B$ なるものがあることを示す. $y \times X \cap A =: y \times V'$ とおく. V' は x の開近傍. X の仮定より相対 compact 開近傍 $x \in V$, $\bar{V} \subset V'$ がある. $U := \{y' \in Y \mid y' \times \bar{V} \subset A\}$ とおくと $y \in U$, $U \times \bar{V} \subset A$. $\tilde{p} := p \times 1$ とおく. 一般に $U \subset p^{-1}(p(U))$ で, $p^{-1}(p(U)) \times \bar{V} \subset \tilde{p}^{-1}\tilde{p}(U \times \bar{V}) \subset \tilde{p}^{-1}\tilde{p}(A) = A$ と U の定義より $p^{-1}(p(U)) \subset U$. $\therefore U = p^{-1}(p(U))$. $\forall y' \in U$ に対し $\bar{V}$ compact, $y' \times \bar{V} \subset A$, A 開より, y' の開近傍 W , $W \times \bar{V} \subset A$ が取れるので U は開. (各点 $(y', x') \in y' \times \bar{V} \subset A$ に開近傍 $U_{x'} \times V_{x'} \subset A$ をとれば $\{V_{x'}\}$ の有限個 $V_{x'_1}, \dots, V_{x'_n}$ で $\bar{V}$ を覆えるので対応する $U_{x'_i}$ の共通部分を W とする.)

•(4) CW 複体 X と局所有限 CW 複体 Y の積複体 $X \times Y$ は CW 複体. 特に, $X \times I$ ($I = [0, 1]$) は CW 複体.

($\because$) $(X \times Y, D \times D')$ は閉包有限で, $\Phi \times \Phi': \coprod_{\lambda, \mu} B_\lambda^n \times B_\mu^m = (\coprod_\lambda B_\lambda^n) \times (\coprod_\mu B_\mu^m) \xrightarrow{1 \times \Phi'} \coprod_\lambda B_\lambda^n \times Y \xrightarrow{\Phi \times 1} X \times Y$ は, $\coprod_\lambda B_\lambda^n$, Y が局所 compact より, 商写像 $1 \times \Phi', \Phi \times 1$ の合成なので商写像. $\therefore$ 弱位相をもつ.

•(5) CW 複体 X からのホモトピー $h: X \times I \rightarrow Y$ も各 $B^n \times I \xrightarrow{\phi_\lambda \times 1} X \times I \xrightarrow{h} Y$ が連続なら h は連続.

CW 複体 X と部分複体 A の対 (X, A) を **CW 対** (CW pair) という.

•(6) (i) CW 対 (X, A) は NDR 対. (ii) CW 複体 X は局所可縮.

(より強く, 任意の A ($x \in X$) の近傍 U の中に A (x) の近傍 V で, A (x) が V の DR となるものが取れる.)

($\because$) $\tilde{X}^n := X^n \cup A$ として $V_n \subset \tilde{X}^n$ 開と変位ホモトピー $h_t^n: V_n \rightarrow V_n$ を $\tilde{X}^{-1} := A =: V_{-1} (= V_0)$, $h_t^{-1} = 1_A$ から帰納的に拡張して $V_n \cap \tilde{X}^{n-1} = V_{n-1}$, $\bar{V}_n \subset U$, $h_t^n|_{V_{n-1}} = h_t^{n-1}$, $h_0^n = 1$, $h_1^n \subset A$ となる様構成し, $V = \bigcup_n V_n$, $h_t|_V = h_t^n$ とすればよい. V_{n-1} , h_t^{n-1} ができたとして, $\bar{e}_\lambda^n \cap \bar{V}_{n-1} \neq \emptyset$ なる各 n 胞体 $e = e_\lambda^n \subset X^n \setminus A$ と特性写像 $\phi = \phi_\lambda: B^n \rightarrow \bar{e} \subset \tilde{X}^n$ に対し, $U' := \phi^{-1}(U)$, $V'_{n-1} := \phi^{-1}(V_{n-1})$ として, B^n の中に V'_n を, B^n の点を極座標 (x, s) ($x \in S^{n-1}$, $s \in [0, 1]$) で表すとき $1 > \varepsilon > 0$ に対し,

$$V'_n := \{(x, s) \in B^n \mid x \in V'_{n-1}, 1 \geq s > 1 - \varepsilon\} \text{ (図) } (V'_{n-1} \text{ の } \text{「} 1 - \varepsilon \text{ 近傍} \text{」})$$

とすれば, $\bar{V}'_{n-1} \subset U'$ が compact より, 1 に十分近い ε に対し, $\bar{V}'_n \subset U'$ とできる. $V_{n\lambda} := \phi(V'_n)$, $V_n := \bigcup_\lambda V_{n\lambda}$ とし, $h_t^n|_{V_{n\lambda}}(x, s) := \phi(x.s + t)$ ($0 \leq t \leq 1 - s$), $:= h^{n-1}(\phi(x.s + t), (s + t - 1)/s)$ ($1 - s \leq t \leq 1$) とおけば求めるものをえる. (ii) は x が頂点になる様に X を細分すればよい.(図)

(注) **定理 (森田)** CW 複体は paracompact 完全正規空間 (perfectly normal) である.