4　CW 複体のホモロジー群

4.1　胞体のホモロジー群

4.1.1　S^n, (B^n, S^{n-1}) の (被約) ホモロジー群

(公理系から求める. 係数群を $H_0(\mathrm{P}) = R\langle p_0\rangle = R$ とする.)

$S^0 = \{\pm 1\}$ を $a_+ := 1,\ a_- := -1$ として $S^0 = \{a_+, a_-\}$ とし, $a_\pm$ を特異 0-単体や $H_0(S^0)$ の生成元とみなす. 例 2 より $H_k(S^0) \cong H_k(a_+) \oplus H_k(a_-) \cong H_k(\mathrm{P}) \oplus H_k(\mathrm{P})\ (k \in \mathbb{Z})$. $\therefore\ H_k(S^0) = 0\ (k \neq 0)$ (次元公理).

$$H_0(S^0) = R\langle a_+, a_-\rangle = R\langle a_+\rangle \oplus R\langle a_-\rangle \xleftarrow[\cong]{i_{+*}+i_{-*}} H_0(\mathrm{P}) \oplus H_0(\mathrm{P}) \quad (i_\pm : \mathrm{P} \to a_\pm \hookrightarrow S^0,\ i_{\pm *}(p_0) = a_\pm)$$

$\varepsilon(a_+) = \varepsilon(a_-)$ より, $\tilde{H}_0(S^0) = \mathrm{Ker}\ \varepsilon_* = R\langle a_+ - a_-\rangle$. $H_k(S^0) = 0\ (k \neq 0)$ と合わせて,

$$\tilde{H}_k(S^0) = \begin{cases} R\langle a_+ - a_-\rangle \cong R & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}, \qquad H_k(S^0) = \begin{cases} R\langle a_+, a_-\rangle \cong R \oplus R & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

$(n > 0)$ 同相写像 $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \approx (B^n, S^{n-1}) \approx (S^n_\pm, S^{n-1})$ を定めておく. これら以外の無名の写像は包含写像.

S^n の上 (下) 半球面を $S^n_\pm := \{(\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid y \geqq 0\ (\leqq 0)\}$ とすると $S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$ で S^{n-1} は $S^n_\pm$ の NDR より $S^n_\pm$ は切除対. $X = \Delta^n, S^n_\pm, B^n, \mathbb{R}^n$ は可縮 ($\simeq \mathrm{P}$, $B^n, \mathbb{R}^n$ では $h(x,t) := tx$) なので $\tilde{H}_k(X) = 0\ (\forall k)$.

(方法 1) $(S^n, S^n_+), (S^n_-, S^{n-1})$ の被約長完全列において $\tilde{H}_*(S^n_+) = \tilde{H}_*(S^n_-) = 0$ より

$$\tilde{H}_k(S^n_+) = 0 \to \tilde{H}_k(S^n) \xrightarrow{j_*} H_k(S^n, S^n_+) \to \tilde{H}_{k-1}(S^n_+) = 0 \implies j_* : \tilde{H}_k(S^n) \cong H_k(S^n, S^n_+)$$
$$\tilde{H}_k(S^n_-) = 0 \to H_k(S^n_-, S^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \to \tilde{H}_{k-1}(S^n_-) = 0 \implies \partial_* : H_k(S^n_-, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$$
$$\tilde{H}_0(S^n_-) = 0 \to H_0(S^n_-, S^{n-1}) \to 0 \implies H_0(S^n_-, S^{n-1}) = 0$$

切除同型により $e_* : H_k(S^n_-, S^{n-1}) = H_k(S^n_-, S^n_+ \cap S^n_-) \xrightarrow{\cong} H_k(S^n_+ \cup S^n_-, S^n_+) = H_k(S^n, S^n_+)$.

合せて　$\partial_* e_*^{-1} j_* : \tilde{H}_k(S^n) \overset{\cong}{\to} H_k(S^n, S^n_+) \overset{\cong}{\leftarrow} H_k(S^n_-, S^{n-1}) \overset{\partial_*}{\cong} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$　　　　$(*)$

$$\therefore\ \tilde{H}_k(S^n) \cong H_k(S^n_-, S^{n-1}) \overset{\partial_*}{\cong} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \cong \cdots \cong \begin{cases} \tilde{H}_{k-n}(S^0) & (k \geqq n) \\ H_0(S^{n-k}_-, S^{n-k-1}) = 0 & (k < n) \end{cases}$$

同相から誘導される同型　$H_k(S^n_-, S^{n-1}) \cong H_k(B^n, S^{n-1}) \cong H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ により左辺を置き換えて

定理 4.1.1 $H_{k+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}) \overset{\partial_*}{\cong} \tilde{H}_k(S^n) \cong H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_k(B^n, S^{n-1}) \cong R\delta_{kn} = \begin{cases} R & (k = n \geqq 0) \\ 0 & (k \neq n) \end{cases}$

(方法 2) reduced homology でも $A \cap B \neq \emptyset$ のときは Mayer-Vietoris 完全列が成り立つ事を利用する.

S^n_+, S^n_- の被約 Mayer-Vietoris 完全列において $\tilde{H}_*(S^n_+) = \tilde{H}_*(S^n_-) = 0$, $S^n_+ \cup S^n_- = S^n$, $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$ より

$$0 = \tilde{H}_k(S^n_+) \oplus \tilde{H}_k(S^n_-) \to \tilde{H}_k(S^n_+ \cup S^n_-) \overset{\partial_*}{\cong} \tilde{H}_{k-1}(S^n_+ \cap S^n_-) \to \tilde{H}_{k-1}(S^n_+) \oplus \tilde{H}_{k-1}(S^n_-) = 0 \implies$$
$$\partial_* : \tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$$

後は方法 1 と同様にして定理 4.1.1 を得る.

$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus R$, $H_k(X) = \tilde{H}_k(X)\ (k \neq 0)$ より上の定理の系として

定理 4.1.2 $n \geqq 1$ のとき　$H_k(S^n) \cong \begin{cases} R & (k = 0, n) \\ 0 & (k \neq 0, n) \end{cases}$

注意 4.1.1 (特異ホモロジー群における生成元) $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 $\boldsymbol{i}^n := [1_{\Delta^n}]$:

恒等写像 1_{Δ^n} は $\partial 1_{\Delta^n} \in C_{n-1}(\partial\Delta^n)$ なので $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ の cycle になる. このホモロジー類を $\boldsymbol{i}^n$ とする.

次元公理の証明中で $\boldsymbol{i}^0 = [1_{\Delta^0}] = [1_{e_0}] \in H_0(\Delta^0) = H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) \cong \mathbb{Z}$ は生成元, を示した. $(\partial\Delta^0 = \emptyset.)$

$n \geqq 0$ のとき, $\Delta^n = e_0 \cdots e_n = \partial^{n+1}\Delta^{n+1} \subset \Delta^{n+1}$ である. $\Lambda^n := \partial\Delta^{n+1} - \mathring{\Delta}^n = \cup_{i=0}^n \partial^i \Delta^{n+1}$ とおくと,

$\Lambda^n \cup \Delta^n = \partial\Delta^{n+1}$, $\Lambda^n \cap \Delta^n = \partial\Delta^n$ で Λ^n, Δ^n は切除対. $\therefore\ e_* : H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \overset{\cong}{\to} H_n(\partial\Delta^{n+1}, \Lambda^n)$.

上の S^n, S^n_+, S^n_- を $\partial\Delta^{n+1}, \Lambda^n, \Delta^n$ で置き換えて

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1}) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} \tilde{H}_n(\partial\Delta^{n+1}) \xrightarrow[\cong]{j_*} H_k(\partial\Delta^{n+1}, \Lambda^n) \xleftarrow[\cong]{e_*} H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n)\ (\cong H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0))$$

$j_*(\partial_*(\boldsymbol{i}^{n+1})) = \sum_{i=0}^{n+1} [\partial^i 1_{\Delta^{n+1}}] \mod C_n(\Lambda^n) = [\partial^{n+1} 1_{\Delta^{n+1}}] \mod C_n(\Lambda^n) = [1_{\Delta^n}] = e_*(\boldsymbol{i}^n) \in H_n(\partial\Delta^n, \Lambda^n)$

よりこの同型により帰納的に $\boldsymbol{i}^{n+1}$ は $\boldsymbol{i}^n, \ldots, \boldsymbol{i}^0$ に移るので $\boldsymbol{i}^n$ は $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ の生成元である.

$H_k(B^n, S^{n-1}) \overset{\cong}{\to} H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$ の生成元: $\mathbb{R}^n$ 内の順序 n-単体 $\Delta^n_0 = \boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{e}_1 \cdots \boldsymbol{e}_n \subset \mathbb{R}^n$ を, $\overrightarrow{\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_1}, \cdots, \overrightarrow{\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_n}$ が $\mathbb{R}^n$ の正の向きになり, Δ^n_0 の重心が原点 0 になる様, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \cdots), \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を $\mathbb{R}^n$ の基本ベクトルとし $\boldsymbol{e}_0 := -\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i$ とする. Δ^n_0 は 0 を頂点とする $\partial\Delta^n_0$ の錐なので点 $y \in \Delta^n_0$ は $\boldsymbol{x} \in \partial\Delta^n_0$ を用いて $y = t\boldsymbol{x}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と表せる. このと

き写像 $\psi^n:\Delta_0^n\to B^n$, $\psi^n(t\boldsymbol{x})=t\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$ は (向きを保つ) 同相で, $\sigma_{\Delta_0^n}:\Delta^n\cong\Delta_0^n$ との合成写像 $\psi^n\sigma_{\Delta_0^n}:\Delta^n\to B^n$ は, $\psi^n\sigma_{\Delta_0^n}(\partial\Delta^n)\subset S^{n-1}$ より $C_n(B^n,S^{n-1})$ の cycle になるのでこのホモロジー類 $[B^n,\partial B^n]$ $(=(\psi^n\sigma_{\Delta_0^n})_*(\boldsymbol{i}^n))$ が $H_k(B^n,S^{n-1})$ の生成元になる.

B^n は $\mathbb{R}^n$ の, S^{n-1} は $\mathbb{R}^n-0$ の DR なので $i_n:(B^n,S^{n-1})\hookrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ は同型 $i_{n*}:H_n(B^n,S^{n-1})\overset{\cong}{\to}H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ を誘導し, $\sigma_{\Delta_0^n}$ は $C_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ の cycle になる. このホモロジー類が $H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)\cong\mathbb{Z}$ の生成元 $[\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0]$ $(=\sigma_{\Delta_{0*}^n}(\boldsymbol{i}^n))$ を与える. $i_n\psi^n\sigma_{\Delta_0^n}\simeq\sigma_{\Delta_0^n}:(\Delta^n,\partial\Delta^n)\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0)$ より $i_{n*}[B^n,\partial B^n]=[\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n-0]$.

4.1.2　胞複体 (cell complex), CW 複体 (CW complex) の定義

位相空間 X の部分空間 $e\subset X$ に対し, e の閉包を $\bar{e}$, 境界を $\partial e=\dot{e}:=\bar{e}-e$ とする.

$e=e^n$ が X の n **次元胞体 (n-cell)** $\longleftrightarrow$ 連続写像 $\phi:(B^n,S^{n-1})\to(\bar{e},\partial e)$ で, $\phi|_{\mathring{B}^n}:\mathring{B}^n\to e$ が同相となるもの (相対同相という) が存在するときをいう. n を e の次元, ϕ を e の **特性写像**, $\bar{e}$ を閉胞体 (closed cell), ∂e を e の境界といい, 対比して e を開胞体 (open cell) ともいう. (B^n,S^{n-1}) は $(\Delta^n,\partial\Delta^n)$ や $(I^n,\partial I^n)$ に置き換えても良い.

定義 4.1.1 (胞複体) Hausdorff 空間 (T_2 空間) X の胞体のある集合 D が次をみたすとき D を X の **胞体分割 (cellular decomposition)**, $X=(X,D)$ を**胞複体 (cell complex)** という:

(1) $X=\coprod_{e\in D}e$ (集合として非交和)

(2) $X^n:=\cup\{e\in D\mid\dim e\leqq n\}$ とするとき, $e\in D,\ \dim e=n\implies\partial e\subset X^{n-1}$.

X^n を X の **n-切片 (n-skeleton)** という. 0-胞体 e は X の点で, X の**頂点**という.

D が有限 (=胞体の個数が有限) (可算) のとき $X=(X,D)$ は**有限 (可算)**, $\max_{e\in D}\dim e=n<\infty$ のとき X は n 次元 (有限次元) であるといい $\dim X$ と表す. 有限胞複体は閉胞体の有限和なので compact.

$A\subset X$ は, $e\in D,\ e\cap A\neq\emptyset\Rightarrow\bar{e}\subset A$, が成り立つとき X の **部分複体**という. このとき $D_A:=\{e\in D\mid e\subset A\}$ が A の胞体分割を与える. 特に n-切片 X^n は部分複体になる.

定義 4.1.2 (CW 複体)　胞複体 $X=(X,D)$ が次の条件 (C),(W) をみたすとき $X=(X,D)$ を **CW 複体 (CW complex)** という:

(C) (closure finite)　各 $e\in D$ には $\bar{e}\subset A$ となる有限部分複体が存在する.

(W) (weak topology) $F\subset X$ について, 各 $e\in D$ に対し $\bar{e}\cap F$ が $\bar{e}$ の閉集合 $\iff$ F は X の閉集合, が成立.

(このとき X は閉被覆 $\{\bar{e}\mid e\in D\}$ に関し**弱位相 (weak topology)** をもつ, という.)

CW 複体 $X=(X,D)$ に対し D を CW 分割, A が部分複体のとき (X,A) を **CW 対** (CW pair) という.

D を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $D_n:=\{e\in D\mid\dim e=n\}$ を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_n}$ や $\{e_\lambda^n\}$ と表し, 特性写像を $\phi_\lambda:B^n\to\bar{e}_\lambda\subset X$ と表す.

(注)　有限胞複体は CW 複体である. (C) は自明. (W) は, $\bar{e}\cap F$ が $\bar{e}$ で閉 $\Rightarrow$ X でも閉, より この有限和 F も閉.

• K が多面体 $|K|$ の単体分割のとき, K の開単体の集合 $\{\mathring{s}\mid s\in K\}$ は $|K|$ の胞体分割で, s は $\sigma_s:\Delta^n\overset{\cong}{\to}|s|\subset|K|$ を特性写像とする閉胞体. $|K|$ は (局所有限性より (W) をみたし) CW 複体である.

• CW 複体 X の位相について重要な性質は別紙で述べる.

4.1.3　胞体的 (cellular) chain complex

以下, $\mathbb{Z}$-係数で述べるが, 一般の可換環 (加群) R でも証明も含め同様に成り立つ.

• $1>\varepsilon>0$ に対し, $B_\varepsilon:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x\|\leqq\varepsilon\}$, (半径 ε の閉球体), $N_\varepsilon:=B^n-\mathring{B}_\varepsilon=\overline{B^n-B_\varepsilon}$ (S^{n-1} の閉近傍), $S_\varepsilon:=B_\varepsilon\cap N$ (半径 ε の球面) とすると, S^{n-1} は N_ε の DR, $(B_\varepsilon,S_\varepsilon)$ は NDR 対である. (図)

特性写像 $\phi_\lambda:(B^n,S^{n-1})\to(\bar{e}_\lambda,\partial e_\lambda)$ に対し, $N_\lambda:=\phi_\lambda(N_\varepsilon)$, $B_\lambda:=\phi_\lambda(B_\varepsilon)$, $S_\lambda:=\phi_\lambda(S_\varepsilon)$ とおき, ϕ_λ の制限写像も ϕ_λ と表すと, $\phi_\lambda:(B_\varepsilon,S_\varepsilon)\overset{\approx}{\to}(B_\lambda,S_\lambda)$ は同相, ∂e_λ は N_λ の DR である.

補題 4.1.3 (補足) $X\supset N\supset A$ で, A が N の DR ならば, $k_*:H_*(X,A)\cong H_*(X,N)$ (k は包含写像.)

証明　5lemma による:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \qquad & (\text{完全})\\
\downarrow{\scriptstyle\cong} & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \| & & \\
H_n(N) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X,N) & \longrightarrow & H_{n-1}(N) & \longrightarrow & H_{n-1}(X) & \qquad & (\text{完全})
\end{array}$$

補題 4.1.4 (cell のホモロジー群) $i, j, i_\lambda, j_\lambda$ を包含写像とするとき, 次の準同型は全て同型である.

$$\begin{tikzcd}
H_k(B^n, S^{n-1}) \arrow[r, "i_*", "\cong"'] \arrow[d, "\phi_{\lambda *}"'] & H_k(B^n, N_\varepsilon) \arrow[d, "\phi_{\lambda *}"'] & H_k(B_\varepsilon, S_\varepsilon) \arrow[l, "j_*"', "\cong"] \arrow[d, "\phi_{\lambda *}"', "\cong"] \\
H_k(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda) \arrow[r, "i_{\lambda *}", "\cong"'] & H_k(\bar{e}_\lambda, N_\lambda) & H_k(B_\lambda, S_\lambda) \arrow[l, "j_{\lambda *}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

特に図式中のホモロジー群は, $k=n$ なら全て $H_n(B^n, S^{n-1}) = \mathbb{Z}\langle [B^n, \partial B^n] \rangle \cong \mathbb{Z}$ に同型で, $k \neq n$ なら全て 0.

証明 $i_*, i_{\lambda *}$ の同型は前補題. $j_*, j_{\lambda *}$ は切除同型. $\phi_\lambda : (B_\varepsilon, S_\varepsilon) \xrightarrow{\approx} (B_\lambda, S_\lambda)$ が同相より右の $\phi_{\lambda *}$ が同型で, 従って全て同型になる. □

• 生成元 $\phi_{\lambda *}[B^n, \partial B^n] \in H_n(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda)$ を仮に e'_λ と表すと $H_n(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda) = \mathbb{Z}\langle e'_\lambda \rangle$. e'_λ は $\pm$ を除き, 特性写像 ϕ_λ の取り方によらずに定まる.

CW 対 (X, A) に対し $\bar{X}^n := X^n \cup A$ とおく ($\bar{X}^{-1} := A$). (これを (X, A) の n-切片の様に考える.) また, $X - A$ の n 胞体全体 $D_n - D_{An}$ を $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'_n}$ と表す. $\phi_{\lambda *}[B^n, \partial B^n] \in H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ も e_λ と表し, **有向 n 胞体**という. $k_\lambda : \bar{e}_\lambda \hookrightarrow \bar{X}^n$ を包含写像とすれば, $e_\lambda = k_* e'_\lambda \in H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$.

定理 4.1.5 CW 対 (X, A) に対し (1) $H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) = 0$ $(k \neq n)$. (2) $H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) = \mathbb{Z}\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'_n \rangle$.
即ち, $H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ は $X - A$ の有向 n 胞体全体 $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'_n}$ を基底とする自由加群.

証明 $\bar{X}_N := \bar{X}^{n-1} \cup (\cup_{\lambda \in \Lambda'_n} N_\lambda)$ とおくと, $\bar{X}^{n-1}$ は $\bar{X}_N$ の DR になり, $\bar{X}^n = \bar{X}_N \cup (\coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} B_\lambda)$, $\bar{X}_N \cap (\coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} B_\lambda) = \coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} S_\lambda$. 従って上の補題と同様に, $(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \overset{i'}{\hookrightarrow} (\bar{X}^n, \bar{X}_N) \overset{j'}{\hookleftarrow} \coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} (B_\lambda, S_\lambda)$ より

$$H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \underset{\cong}{\xrightarrow{i'_*}} H_k(\bar{X}^n, \bar{X}_N) \underset{\cong}{\xleftarrow{j'_*}} H_k(\textstyle\coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} (B_\lambda, S_\lambda)) \underset{\cong}{\xleftarrow{\sum i_{\lambda *}}} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_k(B_\lambda, S_\lambda)$$

上の補題とこの同型列を包含写像 $k_\lambda : \bar{e}_\lambda \hookrightarrow \bar{X}^n$ によりつなげると横の列が同型な次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
H_k(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda) \arrow[r, "i_*", "\cong"'] \arrow[d, "k_{\lambda *}"'] & H_k(\bar{e}_\lambda, N\bar{e}_\lambda) \arrow[d, "k_{\lambda *}"'] & H_k(B_\lambda, S_\lambda) \arrow[l, "j_*"', "\cong"] \arrow[d, "k_{\lambda *}"'] \arrow[r, equal] & H_k(B_\lambda, S_\lambda) \arrow[d, "\text{直和への入射}"] \\
H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \arrow[r, "i'_*", "\cong"'] & H_k(\bar{X}^n, \bar{X}_N) & H_k(\coprod_{\lambda \in \Lambda'_n} (B_\lambda, S_\lambda)) \arrow[l, "j'_*"', "\cong"] & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_k(B_\lambda, S_\lambda) \arrow[l, "\sum_\lambda k_{\lambda *}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

可換性より同型 $H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_k(B_\lambda, S_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_k(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda)$ が,
$\sum_\lambda k_{\lambda *} : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_k(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda) \xrightarrow{\cong} H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ により与えられ (X が有限なら加法性公理なしで成立),
$k = n$ のときは, $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda'_n} H_n(\bar{e}_\lambda, \partial \bar{e}_\lambda) = \mathbb{Z}\langle e'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'_n \rangle$, $k_{\lambda *} e'_\lambda = e_\lambda$ より $H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) = \mathbb{Z}\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'_n \rangle$.
$k \neq n$ のときは $H_k(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) = 0$ をえる. (この証明は係数を R にしても同じ.) □

生成元 $e_\lambda \in H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ も $\pm$ を除き, 特性写像 ϕ_λ の取り方によらずに定まるが, この一方を指定することを e_λ に**向きをつける**という.

• CW 対 (X, A) に対し, 3 対 $(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2})$ の完全列 (これも対のホモロジー完全列の公理から得られる) の境界準同型 $\partial_* : H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \to H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2})$ を用いて

$$\mathcal{C}_n(X, A) := H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) = \mathbb{Z}\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'_n \rangle,\ \partial_n := \partial_* : \mathcal{C}_n(X, A) \to \mathcal{C}_{n-1}(X, A),\ \mathcal{C}_*(X, A) := \{\mathcal{C}_n(X, A), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

とおくと次の可換図式により $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ が示され **CW 対の chain complex** (**胞体的 chain complex**) になる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_n(X, A) = H_{n+1}(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\partial_*"] & H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2}) = \mathcal{C}_{n-1}(X, A) \\
H_n(\bar{X}^n) \arrow[r, "j_*"] & H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}) \arrow[u, "j_*"]
\end{tikzcd} \qquad \text{(exact)}$$

定義 4.1.3 (CW 対のホモロジー群) CW 対 (X, A) に対し, chain complex
$\mathcal{C}_*(X, A) := \{\mathcal{C}_n(X, A), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathcal{C}_n(X, A) := \mathbb{Z}\langle e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'_n \rangle$, $\partial_n := \partial_* : \mathcal{C}_n(X, A) \to \mathcal{C}_{n-1}(X, A)$
のホモロジー群 $H_n(\mathcal{C}_*(X, A))$ を **CW 対 (X, A) のホモロジー群**という. また, $A = \emptyset$, $\mathcal{C}_*(X) := \mathcal{C}_*(X, \emptyset)$ として $H_n(\mathcal{C}_*(X))$ を **CW 複体 X のホモロジー群**という. これらは **胞体的ホモロジー群**ともいう.

$D_{An} = \{e^n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda''_n\}$ とすれば $\mathcal{C}_n(A) = \mathbb{Z}\langle e^n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda''_n\rangle$, $\mathcal{C}_*(A)$ は $\mathcal{C}_*(X)$ の部分複体で, $\Lambda'_n = \Lambda_n - \Lambda''_n$ より $\mathcal{C}_n(X,A) \cong \mathcal{C}_n(X)/\mathcal{C}_n(A)$. $\therefore \mathcal{C}_*(X,A) \cong \mathcal{C}_*(X)/\mathcal{C}_*(A)$. 即ち, $\mathcal{C}_*(X,A) = \mathcal{C}_*(X)/\mathcal{C}_*(A)$ とみなしてよい.

定理 4.1.6 (CW 対のホモロジー群) CW 対 (X,A) と CW 複体 X に対し次は同型:

$$\theta : H_n(\mathcal{C}_*(X,A)) \cong H_n(X,A),\ \ \text{特に}\ H_n(\mathcal{C}_*(X)) \cong H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

この定理の証明の為補題を用意する.

補題 4.1.7 以下の部分複体対間の写像は全て包含写像とするとき,

(i) $H_q(\bar{X}^n, A) = 0 \ \ (q > n)$

(ii) $k_{n*} : H_q(\bar{X}^n, A) \cong H_q(\bar{X}^{n+r}, A)\ (q < n,\ r \geqq 0) \quad (\therefore\ H_n(\bar{X}^{n+1}, A) \cong H_n(\bar{X}^{n+2}, A) \cong \cdots)$

(iii) $i_{n*} : H_q(\bar{X}^n, A) \cong H_q(X, A)\ (q < n) \quad (\therefore\ (i_{n+1*} : H_n(\bar{X}^{n+1}, A) \cong H_n(X, A))$

(vi) $j_* : H_n(\bar{X}^{n+r}, A) \cong H_n(\bar{X}^{n+r}, \bar{X}^{n-2})\ \ (r \geqq 0) \quad (\therefore\ i_{n*}j_*^{-1} : H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^{n-2}) \cong H_n(X, A))$

証明 次の $(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n, A)$ の長完全列において $H_{q+1}(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) = 0 = H_q(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n)$ が $q{\neq}n, n{+}1$ で成り立つ:

$$0 = H_{q+1}(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) \xrightarrow{\partial_*} H_q(\bar{X}^n, A) \xrightarrow{k_{n*}} H_q(\bar{X}^{n+1}, A) \to H_q(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) = 0 \quad \therefore\ k_{n*}\ \text{は同型}$$

よって (ii) が $q{<}n$, $r{=}1$ のとき成り立つので, r に関し帰納的に成り立つ. (i) は n に関する帰納法. $n{=}{-1}$ のとき $\bar{X}^{-1}{=}A$ より明らか. $H_q(\bar{X}^n, A){=}0$ $(q{>}n)$ を仮定すると $q{>}n{+}1$ で $H_q(\bar{X}^{n+1}, A){=}0$ がわかる.

(iii) 特異ホモロジーの場合: 特異単体 $\sigma{:}\Delta^q{\to}X$ の像 $\sigma(\Delta^q)$ は compact なのである $X^{n+r'}$ に含まれる. よって任意の q-chain c もある $C_q(X^{n+r})$ に含まれる. 特に $\alpha \in H_q(X, A)$ の代表 chain $c{\in}C_q(X)$ $([c]{=}\alpha)$ について $c{\in}C_q(X^{n+r})$ となるので $\alpha{=}[c]{=}i_{n+r*}([c]) \in H_q(\bar{X}^{n+r}, A)$ だから (ii) より i_{n*} は全射. $\beta{\in}H_q(\bar{X}^n, A)$, $i_{n*}(\beta){=}0{\in}H_q(X, A)$ なら代表 chain $c{\in}C_q(\bar{X}^n)$, $\beta = [c]$ について $b{\in}C_{q+1}(X)$ で $c \equiv \partial b \mod C_q(A)$ となるものがあるが, b もある $C_{q+1}(X^{n+r})$ に含まれるので $k_{n*}(\beta) = 0 \in H_q(\bar{X}^{n+r}, A)$. (ii) より k_{n*} は同型なので $\beta = 0$ よって i_{n*} は単射.

(iv) $(\bar{X}^{n+r}, \bar{X}^{n-2}, A)$ の長完全列において (i) より, $H_n(\bar{X}^{n-2}, A) = 0 = H_{n-1}(\bar{X}^{n-2}, A)$. よって j_* は同型.

$$0 = H_n(\bar{X}^{n-2}, A) \to H_n(\bar{X}^{n+r}, A) \xrightarrow{j_*} H_n(\bar{X}^{n+r}, \bar{X}^{n-2}) \to H_{n-1}(\bar{X}^{n-2}, A) = 0$$

定理の証明 $(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2})$ の長完全列において $H_n(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2}) = 0$, $\mathcal{C}_n(X,A) := H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ 等より

$$0 = H_n(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2}) \to H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2}) \xrightarrow{j_*} H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\bar{X}^{n-1}, \bar{X}^{n-2}) \iff$$

$$0 \to H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2}) \xrightarrow{j_*} \mathcal{C}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X,A) \quad \therefore Z_n(\mathcal{C}_n(X,A)) := \operatorname{Ker}\partial_n = \operatorname{Ker}\partial_* \xleftarrow[\cong]{j_*} H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2}).$$

$(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n, \bar{X}^{n-2})$ の長完全列において $H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) = 0$ より

$$H_{n+1}(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) \xrightarrow{\partial_*} H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2}) \to H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^{n-2}) \to H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) = 0$$

これらの完全列の作る図式の可換性と (iv) $H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^{n-2}) \cong H_n(X,A)$ より

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^n) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, equal] & H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^{n-2}) \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{C}_{n+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & Z_n(\mathcal{C}_n(X,A)) & H_{n+1}(\bar{X}^{n+1}, A) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "i_{n+1*}", "\cong"'] & H_n(X,A)
\end{tikzcd}$$

$\therefore H_n(\mathcal{C}_*(X,A)) \cong H_n(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-2})/\operatorname{Im}\partial_* \cong H_n(\bar{X}^{n+1}, \bar{X}^{n-2}) \cong H_n(X,A)$.

(注) 補題の (vi) の同型により上の完全列の $\bar{X}^{n-2}$ は A で置き換えられる. この場合定理の同型は $j_n{:}(\bar{X}^n, A){\hookrightarrow}(\bar{X}^n, \bar{X}^{n-1})$ と射影 $\pi : Z_n(\mathcal{C}_n(X,A)) \to H_n(\mathcal{C}_*(X,A))$ を用いて次の合成で与えられる:

$$\theta = i_{n*}j_{n*}^{-1}\pi^{-1} : H_n(\mathcal{C}_*(X,A)) \xleftarrow{\pi} Z_n(\mathcal{C}_n(X,A)) \xleftarrow[\cong]{j_{n*}} H_n(\bar{X}^n, A) \xrightarrow{i_{n*}} H_n(X,A)$$