

定義 3.6.2 (NDR(再掲)) 位相空間対 (X, A) において, A が閉集合かつ A のある開近傍 U の (strong) deformation retract, 即ち, 開近傍 U と変位ホモトピー $h: U \times I \rightarrow U$, $h: r \simeq 1_U \text{ rel } A$ ($r: U \rightarrow A$, $r|_A = 1_A$) が存在するとき, A は X の **neighbourhood deformation retract (NDR)** (近傍変位レトラクト) といい, (X, A) を NDR 対 (NDR pair), (U, h) を (X, A) の NDR 表現という. このとき特に $i: A \hookrightarrow V$ はホモトピー同値.

例 3.6.1 (NDR) n 次元球体と $n-1$ 次元球面の対 (B^n, S^{n-1}) は NDR 対である. 実際, $B_{1-\varepsilon}^n$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) を半径 $1-\varepsilon$ の球体として, $N = N_\varepsilon := (B^n - B_\varepsilon^n)$, $h(x, t) := (1-t)x/\|x\| + tx$ とすればよい. (S^{n-1} 上 $h(x, t) = x$.)

(注) ホモトピー論においては NDR pair には (B^n, S^{n-1}) がみたま様なもっと強い条件を付ける.

命題 3.6.7 (再掲) A, B が X の閉集合で $X = A \cup B$ とするとき, $A \cap B$ が A の NDR ならば B は X の NDR であり, $\{A, B\}$ は切除対である.

証明 (U, h) を $(A, A \cap B)$ の NDR 表現とすると, $V := U \cup B$ は B の開近傍. (実際, $X - V = A \cup B - U \cup B = A - U$ は閉集合 A の中の閉集合より X の閉集合. $\therefore V$ は開集合.) deformation homotopy $h': V \times I \rightarrow V$ を

$$h'(x, t) := \begin{cases} h(x, t) & (x \in U) \\ x & (x \in B) \end{cases} \quad r'(x) = h'(x, 0) = \begin{cases} r(x) & (x \in U) \\ x & (x \in B) \end{cases}$$

とすれば, $U \cap B = A \cap B$ 上で $h(x, t) = x$ より well-defined, 連続. このとき A, V は $\dot{A} \cup \dot{V} \supset (X - B) \cup V \supset X$ より切除対で, $B \simeq V \text{ (rel } B)$ より次の chain 同値 (chain complex の DR) の列を得るので A, B は切除対:

$$C_*(A) + C_*(B) \xrightarrow{\sim} C_*(A) + C_*(V) \xrightarrow{\sim} C_*(X) = C_*(A \cup B)$$

$(C_*(A) + C_*(V))$ 上の retraction $r_\#$ と deformation homotopy $\bar{h}$ は各特異単体に対して構成されるので, $\sigma \in S_n(A)$ では $r_n(\sigma) = \sigma$, $\bar{h}_n(\sigma) = 0$ とし, $\sigma \in S_n(V) - S_n(A)$ では $r \simeq 1_V$ から得られるものとする. $\square$

系 3.6.8 このとき $e_*: H_n(A, A \cap B) \cong H_n(X, B)$, $e_*: H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$.

注意 3.6.1 境界のある可微分多様体 M の境界 ∂M には $\partial M \times [0, 1)$ と微分同相となる近傍が存在する (collar neighbourhood (襟状近傍)). 従って $(M, \partial M)$ は NDR 対である. 可微分多様体 N が境界を共有する 2 つの多様体 M_1, M_2 ($\partial M_1 = \partial M_2$) に分けられているとき M_1, M_2 は切除対になる. ($N = M_1 \cup M_2$).

また, このことは, M (N) の単体分割で, ∂M (∂M_1) を部分複体とするものが存在することからも分る.

3.8 加法性公理

定義 3.8.1 (chain complex の直和) chain complex の系 $\{C^\lambda = \{C_n^\lambda, \partial_n^\lambda\}\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直和 $C = (C_n, \partial_n) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ とは各 n について C_n, ∂_n が直和 $C_n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_n^\lambda$, $\partial_n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \partial_n^\lambda$ ($c \in C_n^\lambda \Rightarrow \partial_n(c) \in C_{n-1}^\lambda$) とする. 直積も同様 $\prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda = (\prod_{\lambda \in \Lambda} C_n^\lambda, \prod_{\lambda \in \Lambda} \partial_n^\lambda)$. このとき, $Z_n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_n^\lambda$, $B_n = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_n^\lambda$ で, 同型

$$H_n(C) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(C^\lambda)$$

が射影 $p_\lambda Z_n \rightarrow Z_n^\lambda \rightarrow H_n(C^\lambda)$ と, $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(C^\lambda) \rightarrow 0$ (完全) により得られる. 同様に,

$$H_n(\prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H_n(C^\lambda)$$

定理 3.8.1 (加法性定理) 位相空間 X の弧状連結成分の集合が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ のとき特異ホモロジー群 H_n に対し,

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} i_{\lambda*}: \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda) \cong H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z}, i_\lambda: X_\lambda \hookrightarrow X)$$

証明 Δ^n は弧状連結なので特異単体 σ の像 $\sigma(\Delta^n)$ は一つの X_λ に含まれる ($\sigma(\Delta^n) \subset \exists X_\lambda$). 又 $\partial^i \sigma(\Delta^{n-1}) = \sigma(\partial^i \Delta^n) \subset X_\lambda$ より $\partial \sigma \in C_{n-1}(X_\lambda)$. 従って $C_*(X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(X_\lambda)$ および定理が成り立つ.

特異コホモロジー論においては $C^*(X; R) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} C^*(X_\lambda; R)$, $\prod_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda^*: H^n(X; R) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H^n(X_\lambda; R)$.

注意 3.8.1 $X = X_1 \coprod X_2$ (非交和空間) のときは公理 A1-A7 から出る (X_1, X_2 は開かつ閉で切除対):

$X_k \xrightarrow{i_k} X \xrightarrow{j_k} (X, X_k)$ ($k=1, 2$), $e: X_2 = (X_2, \emptyset) \hookrightarrow (X, X_1)$ の導く切除同型 $e_*: H_n(X_2) \cong H_n(X, X_1)$ により

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X_1) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, X_1) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(X_1) \\ & & & & \nwarrow i_{2*} & \uparrow \cong & \uparrow e_* \\ & & & & & H_n(X_2, \emptyset) & \end{array}$$

この可換図式は分裂する短完全列 $0 \rightarrow H_n(X_1) \xrightarrow{i_{1*}} H_n(X) \xrightarrow{e_* j_*} H_n(X_2) \rightarrow 0$ ($n \in \mathbb{Z}$) に置き換えられ

$$i_{1*} + i_{2*} : H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \cong H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

3.9 被約ホモロジー群 (reduced homology group)

一点空間 P を固定し (例えば $P := \{\emptyset\}$), $\varepsilon = \varepsilon_X : X \rightarrow P$ とする. また, $H_0(P)$ と係数群 R と同一視しておく (次元公理). 以下 $X, A \neq \emptyset$ とする.

$$\tilde{H}_n(X) := \text{Ker} [\varepsilon_* : H_n(X) \rightarrow H_n(P)] \quad (\tilde{H}_n(P) = 0 \quad (\forall n))$$

を位相空間 X の **reduced homology group** (被約ホモロジー群) という. $H_n(P) = 0$ ($n \neq 0$), $H_0(P) = R$ より $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ ($n \neq 0$) ($H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus R$ が後で分る).

一般に加群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } f & \hookrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow i| & & \downarrow i & & \downarrow j \\ \text{Ker } g & \hookrightarrow & C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

においては $i(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } g$ より i の制限写像 $i| : \text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } g$ が誘導される ($i|$ も i と書く). $H_n(P, P) = 0$ ($\forall n$) と $\varepsilon : (X, A) \rightarrow (P, P)$ から誘導される次のホモロジー長完全列の可換図式より

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_1(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_0(A) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_1(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_0(A) & \xrightarrow{i_*} & H_0(X) & \xrightarrow{j_*} & H_0(X, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_* & & \downarrow \varepsilon_* & & \downarrow \varepsilon_* & & \downarrow \varepsilon_* & & \\ & & H_1(P, P) = 0 & \longrightarrow & H_0(P) & \xlongequal{\quad} & H_0(P) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

次の被約ホモロジー群の完全系列を得る:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow H_1(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0$$

一点空間 $\{x\}$ は単に x とかく. このとき $\varepsilon_* : H_n(x) \cong H_n(P)$, $\tilde{H}_n(x) = 0$ で $x \in X$ のとき $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x)$ ($\forall n$). retraction $r : X \rightarrow x$ と splitting の例 1 により $H_0(X) \cong H_0(X, x) \oplus H_0(x) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus H_0(P)$.

注意 3.9.1 (添加鎖複体 (augmented chain complex)) chain complex $C = \{C_n, \partial_n\}$ において, $\varepsilon : C_0 \rightarrow R$, $\varepsilon(\sum_i r_i a_i) = \sum_i r_i$ を添加写像 (augmentation) といい, ($\varepsilon \partial_1 = 0$ のとき) chain complex C^+ :

$$C_n^+ = C_n \quad (n \neq -1), \quad \partial_n^+ = \partial_n \quad (n \neq 0), \quad C_{-1}^+ = R, \quad \partial_0^+ = \varepsilon, \quad C^+ = \{\rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0\}$$

を C の添加鎖複体 (augmented chain complex) といい, このホモロジー群を C の被約ホモロジー群という :

$$\tilde{H}_n(C) := H_n(C^+)$$