

レポート問題 (村山)

以下, $\mathbb{Z}$ を整数環, R を 1 をもつ可換環とし, $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (但し, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_1 = 0$) とする. また, 加群 A と R -加群 B に対し $\text{Hom}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ は準同型}\}$ とし, 和 $f + g$ とスカラー倍 rf を

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), \quad (rf)(a) := r(f(a)) \quad (f, g \in \text{Hom}(A, B), a \in A, r \in R)$$

と定める.

問 1 $f + g, rf \in \text{Hom}(A, B)$ を示し, $\text{Hom}(A, B)$ が R -加群になることを証明せよ.

問 2 A も R -加群で, $\text{Hom}_R(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ は } R\text{-準同型}\}$ とするとき, 上の和とスカラー倍により, $\text{Hom}_R(A, B)$ が R -加群になることを証明せよ.

問 3 $m, n \geq 2$, $(m, n) = \gcd(m, n)$ (最大公約数), A を $(\mathbb{Z}-)$ 加群とするととき次を示せ.

(1) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, A) \cong A$, (2) $\text{Hom}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, A) \cong A \oplus A$, (3) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$, (4) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m, n)}$.

問 4 A, A' を加群, B, B' を R -加群とするとき, $h \in \text{Hom}(A', A)$, $k \in \text{Hom}_R(B, B')$ に対し,

$$h^\sharp : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A', B) \quad (h^\sharp(f) := f \circ h), \quad k_\sharp : \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(A, B') \quad (k_\sharp(f) := k \circ f)$$

は R -準同型であることを示せ. さらに, A, A' が R -加群, h が R -準同型ならば, Hom を Hom_R にかえても R -準同型になることを示せ.

問 5 完全列 $0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{f} C_2 \xrightarrow{g} C_3 \rightarrow 0$ に対し, 次の列は完全であることを示せ.

$$0 \rightarrow \text{Hom}(A, C_1) \xrightarrow{f^\sharp} \text{Hom}(A, C_2) \xrightarrow{g^\sharp} \text{Hom}(A, C_3),$$

$$\text{Hom}(C_1, B) \xleftarrow{f^\sharp} \text{Hom}(C_2, B) \xleftarrow{g^\sharp} \text{Hom}(C_3, B) \leftarrow 0.$$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}$ は m 倍する写像 ($m(n) = mn$) を, p は剰余群への射影を表すとする.

問 6 完全列 $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_m \rightarrow 0$ と $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m$ に対し, $m^\sharp$ の像 $\text{Im } m^\sharp$ を求めよ:

$$\text{Im } [m^\sharp : \text{Hom}(\mathbb{Z}, R) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}, R)].$$

($\mathbb{Z}$ -係数) chain complex $C_* = \{C_n, \partial_n\}$ に対し, R -係数の chain complex $C_*^R = \{C_n^R, \partial_n\}$ と cochain complex $C_R^* = \{C_R^n, \delta^n\}$ を, $C_n^R := C_n \otimes R$, $\partial_n := \partial_n \otimes 1_R$,

$$C_R^n := \text{Hom}(C_n, R), \quad \delta^n := \partial_{n+1}^\sharp : \text{Hom}(C_n, R) \rightarrow \text{Hom}(C_{n+1}, R) = C_R^{n+1}$$

と定義する. これらの (コ) ホモロジー群を C_* の R -係数 (コ) ホモロジー群といい, $H_n(C_* : R)$ ($H^n(C_* : R)$) と表すことにする. ($\mathbb{Z} \otimes R \cong R$, $n \otimes r \mapsto nr$ によりこれらを同一視して良い.)

問 7 $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ のとき, 次の chain complex C_* の R -係数 (コ) ホモロジー群を求めよ.

$$C_* = \{0 \xrightarrow{\partial_5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_4=2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2=2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0} 0\}$$

即ち, $C_n = \mathbb{Z}$ ($n = 0, \dots, 4$), その他の $C_n = 0$. $\partial_{2n} = 2$ 倍 ($n = 1, 2$), その他の $\partial_n = 0$. (実は C_* は $\mathbb{RP}^4$ の胞体的 chain complex.)

問 8 位相空間対のコホモロジー論の公理系について述べよ.