

3.3 完全系列 (exact sequence)

3.3.1 ホモロジー完全系列

定義 3.3.1 (加) 群と準同型の列 $\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$ が A_n で **exact (完全)** とは $\text{Ker } f_n = \text{Im } f_{n+1}$ のときをいう. $\forall n$ について A_n で exact のとき この列は **exact (完全)** または **exact sequence (完全 (系) 列)** という. (chain complex $C = \{C_n, \partial_n\}$ が C_n で完全 $\Leftrightarrow H_n(C) = 0$.)

完全列 $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ を **短完全 (系) 列** (short exact sequence) という. このとき f は単射, g は全射で, $\text{Ker } g = \text{Im } f$. 加群 G と部分群 H に対し, $0 \rightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G/H \rightarrow 0$ は完全. (j は剰余群への射影.) (群の短完全列では 0 を $1 (= \{e\})$ にかえる. 短完全列は拡大図式ともいわれる.)

chain complex と chain map の列 (sequence)

$$0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0 \quad (C = \{C_n, \partial_n\}, C' = \{C'_n, \partial'_n\}, C'' = \{C''_n, \partial''_n\}, i = \{i_n\}, j = \{j_n\})$$

が **exact (完全)**, または短完全 (系) 列 (short exact sequence) とは各 $n \in \mathbb{Z}$ について

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{j_n} C''_n \longrightarrow 0$$

が完全, 即ち i_n は単射, j_n は全射で $\text{Ker } j_n = \text{Im } i_n$ のときをいう.

C を鎖複体, C' を部分複体, $C'' := C/C'$ を剰余複体とすれば $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0$ は完全.

命題 3.3.1 (準同型 ∂_* の定義) chain complex の短完全列

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

に対し, **連結準同型 (connecting homomorphism)** または **境界準同型 (boundary homomorphism)** と呼ばれる準同型写像

$$\partial_* : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C') \quad \text{が} \quad \partial_*[z] = [i_{n-1}^{-1} \partial_n j_n^{-1} z]$$

で定義される.

定理 3.3.2 (ホモロジー (長) 完全 (系) 列 (homology long exact sequence)) chain complex の短完全列

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

に対し 次の列は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{j_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C') \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

定理 3.3.3 (∂_* の自然性) ∂_* は chain map に関し自然. 即ち chain complex の短完全列の可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{i'} & D & \xrightarrow{j'} & C'' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (fi = i'f', \quad f''j = jf)$$

に対し, 次の図式は可換 ($f'_* \partial_* = \partial_* f''_*$):

$$\begin{array}{ccc} H_n(C'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(C') \\ \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* \\ H_n(D'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(D') \end{array}$$

系 3.3.4 上の定理の下で次の図式は可換: (定理 3.3.2 より横の列は完全)

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(C') & \xrightarrow{i_*} & H_n(C) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{j_*} & \cdots \\ & & \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(D') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(D) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(D'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(D') & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-1}(D) & \xrightarrow{j'_*} & \cdots \end{array}$$

注意 3.3.1 一般に (加) 群と準同型の列 $A = \{A_n, f_n : A_n \rightarrow A_{n-1}\}$, $B = \{B_n, g_n : B_n \rightarrow B_{n-1}\}$ の間の準同型の組 $h = \{h_n : A_n \rightarrow B_n\}$ が $h_{n-1} \circ f_n = g_n \circ h_n$ をみたすとき (図式が可換なとき) $h = \{h_n\}$ を A, B 間の準同型という. chain map や定理 4, 系 5 の $\{f', f, f''\}$, $\{f'_*, f_*, f''_*\}$ は列間の準同型である. また, 各 h_n が同型のとき h は列の同型写像になり, 逆写像が $h^{-1} := \{h_n^{-1}\}$ で与えられる. (h^{-1} も列間の準同型になる.)

証明には以下の短完全列の可換図式を使う。ここで各 k について i_k は単射, j_k は全射で $\text{Ker } j_n = \text{Im } i_n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{j_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \downarrow \partial'_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} \\
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{i_n} & C_n & \xrightarrow{j_n} & C''_n \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \downarrow \partial'_{n-1} & & \downarrow \partial_{n-1} & & \downarrow \partial''_{n-1}
 \end{array}$$

また, $Z_n = Z_n(C)$, $Z'_n = Z_n(C')$, $Z''_n = Z_n(C'')$, 等とし, $x, x', a \in C'_k$, $y, y', b \in C_k$, $z, z', c \in C''_k$ 等とする.

注意 3.3.2 命題 3.3.1 において, C' が C の部分複体, $C'' = C/C'$ の場合 (例えば, $A \subset X$, $C = C_*(X)$, $C' = C_*(A)$, $C'' = C_*(X, A)$ の場合), $z \in C''_n$, $z = [y]$ ($y \in C_n$ 代表元) とするとき $z \in Z''_n \Leftrightarrow \partial''_n z := [\partial_n y] = 0 \in C''_{n-1} := C_{n-1}/C'_{n-1} \Leftrightarrow \partial_n y \in C'_{n-1}$. $\partial \partial y = 0$ より $\partial_n y \in Z'_{n-1}$. (図) この対応を少し一般化すれば次の証明を得る.

命題 3.3.1 ($\partial_* : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C')$ の定義) の証明 (∂_* が $\partial_*[z] = [i_{n-1}^{-1} \partial_n j_n^{-1} z]$ で定義され準同型になる.)

証明は 4 つの部分に分けて行う.

(1) cycle $z \in Z''_n$ に対し cycle $x \in Z'_{n-1}$ ($\therefore \partial_*[z] = [x]$) が対応すること :

① $z \in Z''_n$ とする. ($\partial''_n z = 0$.)

② j_n 全射より $\exists y \in j_n^{-1}(z)$. ($\therefore j_n y = z$.)

③ 図式の可換性より $j_{n-1}(\partial_n y) = \partial''_n(j_n y) = \partial''_n z = 0$.

$\therefore \partial_n y \in \text{Ker } j_{n-1} = \text{Im } i_{n-1}$.

④ i_{n-1} 単射より $x = i_{n-1}^{-1}(\partial_n y) \in C'_{n-1}$ で, 可換性より

$i_{n-2}(\partial'_{n-1} x) = \partial_{n-1}(i_{n-1} x) = \partial_{n-1}(\partial_n y) = 0$.

i_{n-2} 単射より $\partial'_{n-1} x = 0$. $\therefore x \in Z'_{n-1}$. (以下, z, y, x はこの様にとる.)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \textcircled{2} & \xrightarrow{j_n} & \textcircled{1} \\
 & & y & \xrightarrow{j_n} & z \\
 & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial''_n \\
 \textcircled{4} & x & \xrightarrow{i_{n-1}} & \textcircled{3} & \partial_n y \xrightarrow{j_{n-1}} 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \bullet & \xrightarrow{i_{n-2}} & & 0
 \end{array}$$

(2) $\partial_* : Z''_n \rightarrow H_{n-1}(C')$ は well-defined.

即ち, $z \in Z''_n$ に対し, $y \in j_n^{-1}(z)$ の取り方によらず $[x] \in H_{n-1}(C')$ が定まること :

① $y' \in j_n^{-1}(z)$ に対し $j_n(y - y') = z - z = 0$ より $y - y' \in \text{Ker } j_n = \text{Im } i_n$.

② $a = i_n^{-1}(y - y')$ とすれば 可換性より $i_{n-1}(\partial'_n a) = \partial_n(i_n a) = \partial_n(y - y')$.

③ $x' = i_{n-1}^{-1}(\partial_n y')$ なので $i_{n-1}(x - x') = \partial_n y - \partial_n y' = i_{n-1}(\partial'_n a)$.

i_{n-1} 単射より $x - x' = \partial'_n a \in B'_{n-1}$. $\therefore [x'] = [x] \in H_{n-1}(C')$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \textcircled{2} & \xrightarrow{i_n} & \textcircled{1} & \xrightarrow{j_n} & 0 \\
 & & a & \xrightarrow{i_n} & y - y' & \xrightarrow{j_n} & 0 \\
 & & \downarrow \partial'_n & & \downarrow \partial_n & & \\
 \textcircled{4} & x & - x' & \xrightarrow{i_{n-1}} & \textcircled{3} & \partial_n y - \partial_n y' & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

注意 3.3.3 (2) より $\partial_* z$ は $\forall y \in j_n^{-1}(z)$, $x = i_{n-1}^{-1} \partial_n y$ により $\partial_* z = [x]$ と定義さ

れる. 逆に, $y \in C_n$ で, $j_n y = z \in Z''_n$ となるものが与えられれば

$i_{n-1} x := \partial_n y$ とおけば $\partial_* z = [x] = [i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)]$ である. このことは以下の証明に使う.

(3) $\partial_* : Z''_n \rightarrow H_{n-1}(C')$ が準同型になること.

$z' \in Z''_n$ に対し $y' \in j_n^{-1}(z')$ を取り $x' = i_{n-1}^{-1}(\partial_n y')$ とすると $\partial_*(z') = [x']$.

このとき $j_n y'' = z + z'$ となる y'' として $y'' := y + y'$ をとれば,

$j_n(y + y') = z + z'$, $i_{n-1}(x + x') = \partial_n(y + y')$ より $\partial_*(z + z') = [x + x']$.

ここで $[x + x'] = [x] + [x'] = \partial_*(z) + \partial_*(z')$ より ∂_* は準同型.

(4) $\partial_*(B''_n) = 0$ $\therefore \partial_*$ が $\partial_* : H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C')$ を導くこと. (誘導準同型も同じ ∂_* で表す事にする.)

$z = \partial''_{n+1} c \in B''_n$, $c \in C''_{n+1}$ に対し, j_{n+1} 全射より $\exists b \in j_{n+1}^{-1}(c)$.

b は $j_n(\partial_{n+1} b) = \partial''_{n+1}(j_{n+1} b) = \partial''_{n+1} c = z$ をみたす. ($\therefore y = \partial_{n+1} b$ ととれる.)

このとき $\partial_n y = \partial_n \partial_{n+1} b = 0$ より $\partial_*(B''_n) = 0$. $\square$

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{j_{n+1}} & c \\
 \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial''_{n+1} \\
 y = \partial_{n+1} b & \xrightarrow{j_n} & z
 \end{array}$$

定理 3.3.2 (ホモロジー長完全列) の証明 定理 3.3.2 の証明は 6 つに分けて行う.

$\partial_*[z] = [x] : y \in C_n, z = j_n y, i_{n-1}x = \partial_n y$ としておく.

(1) $\text{Im } i_* \subset \text{Ker } j_* \iff j_* i_* = 0 : j i = 0$ による.

(2) $\text{Im } j_* \subset \text{Ker } \partial_* \iff \partial_* j_* = 0 :$

$$y \in Z_n (\partial_n y = 0) \implies \partial_* j_*[y] = \partial_*[j_n y] = [i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)] = [i_{n-1}^{-1}(0)] = 0$$

(3) $\text{Im } \partial_* \subset \text{Ker } i_* \iff i_* \partial_* = 0 :$

$$\partial_*[z] = [i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)] \quad (j_n y = z) \text{ とすれば}$$

$$i_* \partial_*[z] = i_*([i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)]) = [i_{n-1} i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)] = [\partial_n y] = 0.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & y & \xrightarrow{j_n} & z \\ & \partial_n \downarrow & & & \partial_n'' \downarrow \\ x & \xrightarrow{i_{n-1}} & \partial_n y & \xrightarrow{j_{n-1}} & 0 \end{array}$$

(1)' $\text{Ker } j_* \subset \text{Im } i_* : j_*[y] = 0 \iff y \in Z_n, j_n y = \partial_{n+1}'' c (\exists c \in C_{n+1}'')$.

このとき ∂_* well-defined の証明と同様に $b \in j_{n+1}^{-1}(c)$ に対し

$$j_n(y - \partial_{n+1} b) = z - z = 0. \therefore y - \partial_{n+1} b \in \text{Ker } j_n = \text{Im } i_n.$$

$$a = i_n^{-1}(y - \partial_{n+1} b) \text{ とすれば}$$

$$i_{n-1} \partial_n' a = \partial_n i_n a = \partial_n(y - \partial_{n+1} b) = 0 - 0 = 0.$$

$$\therefore a \in Z_n' \text{ で } i_*[a] = [y - \partial_{n+1} b] = [y] \in H_n(C).$$

$$\begin{array}{ccccc} b & \xrightarrow{j_{n+1}} & c & & a & \xrightarrow{i_n} & y - \partial_{n+1} b \\ \partial_{n+1} \downarrow & & \partial_{n+1}'' \downarrow & & \partial_n' \downarrow & & \partial_n \downarrow \\ \partial_{n+1} b, y & \xrightarrow{j_n} & z & & 0 & \xrightarrow{i_{n-1}} & 0 \end{array}$$

(2)' $\text{Ker } \partial_* \subset \text{Im } j_* : [z] \in \text{Ker } \partial_* \iff z \in Z_n'', j_n y = z \implies [i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)] = 0.$

$$\therefore \exists a \in C_n' (\partial_n' a = i_{n-1}^{-1}(\partial_n y)). \therefore \partial_n i_n a = \partial_n y. \quad y' = y - i_n a \text{ とおくと}$$

$$\partial_n y' = \partial_n y - \partial_n i_n a = 0. \therefore y' \in Z_n \text{ で } j_*[y'] = [j_n y - j_n i_n a] = [j_n y] = [z].$$

$$\begin{array}{ccccc} & & a & & y & \xrightarrow{j_n} & z \\ & & \partial_n' \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial_n'' \downarrow \\ x & \xrightarrow{i_{n-1}} & \partial_n y & \xrightarrow{j_{n-1}} & 0 \end{array}$$

(3)' $\text{Ker } i_* \subset \text{Im } \partial_* : [x] \in \text{Ker } i_* \iff x \in Z_{n-1}', i_{n-1}x = \partial_n y (\exists y \in C_n).$

$$\text{このとき } \partial_n' j_n y = j_{n-1} \partial_n y = j_{n-1} i_{n-1} x = 0 \text{ より } z = j_n y \in Z_n'' \text{ かつ } \partial_*[z] = [x]. \quad \square$$

定理 3.3.3 (∂_* の自然性) の証明

C', C, C'' の boundary operator はすべて ∂, D', D, D'' のはすべて ∂' と表すことにする.

$[z] \in H_n(C'')$ に対し $y \in j_n^{-1}(z), i_{n-1}x = \partial_n y$ とすると

$$\partial_*[z] = [x]. \text{ ここで } f_*''[z] = [f_n'' z], f_*'[x] = [f_{n-1}' x].$$

$j_n' y' = f_n'' z$ となる $y' \in D_n$ として $f_n y$ がとれる: $\therefore$

$$j_n'(f_n y) = f_n''(j_n y) = f_n'' z. \text{ このとき } \partial_*' f_*''[z] = [i_{n-1}'^{-1} \partial'(f_n y)].$$

$$\partial'(f_n y) = f_{n-1}(\partial_n y) = f_{n-1}'(i_{n-1}x) = i_{n-1}'(f_{n-1}' x) \text{ より}$$

$$\partial'(f_n y) = i_{n-1}'(f_{n-1}' x). \therefore [f_{n-1}' x] = \partial_*'[f_n'' z].$$

$$\therefore \partial_*' f_*''[z] = \partial_*'[f_n'' z] = [f_{n-1}' x] = f_*'[x] = f_*' \partial_*[z]. \quad \square$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{i_{n-1}} & \partial_n y & \xleftarrow{\partial_n} & y & \xrightarrow{j_n} & z \\ f_{n-1}' \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_n'' \downarrow \\ f_{n-1}' x & \xrightarrow{i_{n-1}'} & f_{n-1}(\partial_n y) & \xleftarrow{\partial_n'} & f_n y & \xrightarrow{j_n'} & f_n'' z \end{array}$$

系 3.3.4 の定理 3.3.3 以外の部分は $f i = i' f'$ より $f_* i_* = (f i)_* = (i' f')_* = i_*' f_*'$. 同様に $f'' j = j' f'$ より $f_*'' j_* = j_*' f_*'$.

3 対 (triple) 一般に, $X \supset A \supset B$ のとき, 組 (X, A, B) を **3 対 (triple)** という. 加群と部分群の 3 対 (G, H, K) と包含写像 $i : (H, K) \hookrightarrow (G, K), j : (G, K) \hookrightarrow (G, H)$ は次の剰余加群の完全列を誘導する: (証明は容易)

$$0 \rightarrow H/K \xrightarrow{i} G/K \xrightarrow{j} G/H \rightarrow 0 \quad (\text{対の準同型 } i, j \text{ から誘導される準同型も } i, j \text{ で表した.})$$

系 3.3.5 (3 対の完全列) chain complex と部分複体の 3 対 (C, D, E) と包含写像 $i : (D, E) \hookrightarrow (C, E), j : (C, E) \hookrightarrow (C, D)$ は剰余複体の短完全列 $0 \rightarrow D/E \xrightarrow{i} C/E \xrightarrow{j} C/D \rightarrow 0$ と次の 3 対のホモロジー群の長完全列を導く:

$$\cdots \rightarrow H_n(D/E) \xrightarrow{i_*} H_n(C/E) \xrightarrow{j_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(D/E) \rightarrow \cdots$$

さらに, 対 (C, D) における連結準同型を $\partial_*' : H_n(C/D) \rightarrow H_{n-1}(D), (D, E)$ における包含写像の誘導する射影を $k : D \hookrightarrow D/E$ とするとき $\partial_* = k_* \circ \partial_*'$ が成り立つ.

証明 $\partial_* = k_* \circ \partial_*'$ を示す. (他は容易.) 下の左の図式は可換だから定理 3.3.3 より右の可換性が出る:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & C/D \longrightarrow 0 \\ & & k \downarrow & & k' \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & D/E & \xrightarrow{i} & C/E & \xrightarrow{j} & C/D \longrightarrow 0 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} H_n(C/D) & \xrightarrow{\partial_*'} & H_{n-1}(D) \\ \parallel & & k_* \downarrow \\ H_n(C/D) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(D/E) \end{array}$$

位相空間対のホモロジー長完全系列 位相空間対 (X, A) に対し, 包含写像を

$$i : A \hookrightarrow X, \quad j : X = (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

とすると, 包含写像 $i_n : C_n(A) \hookrightarrow C_n(X)$ と剰余群への射影 $j_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$ を誘導し, $0 \rightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_n} C_n(X) \xrightarrow{j_n} C_n(X, A) \rightarrow 0$ は完全. $i_\# = \{i_n\}, j_\# = \{j_n\}$ は chain map で

$$0 \longrightarrow C_*(A) \xrightarrow{i_\#} C_*(X) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A) \longrightarrow 0$$

は chain complex の完全系列になる. よって定理 3.3.2 より,

定理 3.3.6 (ホモロジー (長) 完全 (系) 列 (homology long exact sequence)) 位相空間対 (X, A) に対し, 次は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots \quad H_0(X, A) \rightarrow 0$$

定理 3.3.7 (∂_* の自然性) 位相空間対間の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に関し ∂_* は自然. 即ち, $f_X := f : X \rightarrow Y, f_A := f|_A : A \rightarrow B$ とし, $i' : B \hookrightarrow Y, j' : Y \hookrightarrow (Y, B)$ を包含写像とするとき次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) \\ f_* \downarrow & & f_{A*} \downarrow \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) \end{array}$$

よって, 次の図式は可換で, 上下の横の列は完全:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & f_{A*} \downarrow & & f_{X*} \downarrow & & f_* \downarrow & & f_{A*} \downarrow & & f_{X*} \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(下の図式の可換性は上の可換性と $f_X i = i' f_A, f j = j' f_X \Rightarrow f_{X*} i_* = i'_* f_{A*}, f_* j_* = j'_* f_{X*}$ による.)

注意 3.3.4 位相空間対 (X, A) を単体複体対 (K, L) に置き換え, 位相空間対間の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ を単体複体対間の単体写像 $f : (K, L) \rightarrow (K', L')$ に置き換えても上の 2 つの定理は同様に成り立つ.

位相空間の 3 対 (X, A, B) に対し, $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$ なので $(A, B) \xrightarrow{i} (X, B) \xrightarrow{j} (X, A)$ より

$$0 \rightarrow C_*(A, B) \xrightarrow{i_\#} C_*(X, B) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

また連続写像 $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ は短完全列の可換図式を誘導するので

定理 3.3.8 (3 対の完全系列) 位相空間の 3 対 (X, A, B) と包含写像 $(A, B) \xrightarrow{i} (X, B) \xrightarrow{j} (X, A)$ に対し次の列は完全であり, ∂_* は連続写像 $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$ に関し自然, 即ち $\partial_* f_{(X, A, B)*} = f_{(A', B')*} \partial_*$.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \cdots \quad H_0(X, A) \rightarrow 0$$

さらに, 対 (X, A) における連結準同型 $\partial'_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ と $k' : A = (A, \emptyset) \hookrightarrow (A, B)$ に対し

$$\partial_* = k'_* \partial'_* : H_n(X, A) \xrightarrow{\partial'_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i'^*} H_{n-1}(A, B)$$

($\partial_* = k'_* \partial'_*$ は包含写像 $k : (X, A) = (X, A, \emptyset) \hookrightarrow (X, A, B)$ ($k' := k_{(A, \emptyset)}$) に対する ∂_* の自然性から得られる.)

例 3.3.1 単体複体 K の 3 対 (K^n, K^{n-1}, K^{n-2}) の単体的ホモロジー群を考える. ($K^n := \{s \in K \mid \dim s \leq n\}$) $C_n(K^{n-1}) = 0, C_n(K) = C_n(K^n) = C_n(K^n, K^{n-1})$ ($\forall n$) に注意すれば $s \in K^n \Rightarrow \partial[s] \in C_{n-1}(K^{n-1})$ より $\partial[s] = 0 \in C_{n-1}(K^n, K^{n-1})$. $\therefore C_n(K) = Z_n(K^n, K^{n-1})$. $B_n(K^n, K^{n-1}) = C_{n+1}(K^n) = 0$ より

$$C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1}).$$

$\partial_* : H_n(K^n, K^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$ について: $c \in C_n(K)$ に対し $\partial_*(c) = [\partial c] \in H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) = C_{n-1}(K)$ より連結準同型 ∂_* は境界作用素 $\partial : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ に一致する.

これより 多面体 $|K|$ の特異ホモロジー群 $H_*(|K|)$ について, $C_n(K) \cong H_n(|K^n|, |K^{n-1}|)$ で,

$\partial_* : H_n(|K^n|, |K^{n-1}|) \rightarrow H_{n-1}(|K^{n-1}|, |K^{n-2}|)$ が単体複体の境界作用素 ∂ に対応することが分れば, 単体複体のホモロジー群 $H_n(K)$ と $H_*(|K|)$ が近いものであることが分る. (これを元に同型であることが示される.)