

圏と関手

圏 (category) 圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ は**対象 (object)** ($A \in \mathcal{O}$) と**射 (morphism, arrow)** ($f \in \mathcal{M}$) からなる.

例 まず, 例を挙げる.

- (1) 集合の圏 Set : 対象は集合, 射は写像.
- (2) 位相空間の圏 Top : 対象は位相空間, 射は連続写像.
- (2') 位相空間対の圏 Top^2 : 対象は位相空間対, 射は対の連続写像.
- (3) 群の圏 Grp : 対象は群, 射は準同型.
- (3') 加群の圏 Mod : 対象は加群, 射は準同型.
- (3'') 環 R 上の加群の圏 $R-Mod$: 対象は R -加群, 射は R -準同型.

この様に, 対象とそれにふさわしい射を同時に考え, 特に写像の, 定義域, 値域, 合成, 恒等写像を抽象化したものが圏である. 尚, これらの例の様に, 対象全体 $\mathcal{O}$, 射全体 $\mathcal{M}$ が集合にならないものも考える.

metacategory まず, 集合論を使わずに定義できる metacategory の定義 (公理) を述べるが, 簡単の為 $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ が集合のときの様に記号を用いる, 即ち, 対象は $A, B, \dots \in \mathcal{O}$, 射は $f, g, \dots \in \mathcal{M}$ と表し, 対応は写像の記号を用いる.

metacategory $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M}) = (\mathcal{O}(\mathcal{C}), \mathcal{M}(\mathcal{C}))$ は対象と射からなり, 次の4つの演算をもつ.

(1,2) $f \in \mathcal{M}$ には**定義域 (domain, source)** $A \in \mathcal{O}$, **値域 (codomain, range, target)** $B \in \mathcal{O}$ が対応する, 即ち写像 $S: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}$ (source), $T: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{O}$ (target) が与えられている. このとき次の様に表す:

$$f: A \rightarrow B, \quad A \xrightarrow{f} B \quad (A = S(f), B = T(f))$$

(S は dom, T は cod と表される.)

(3) **恒等射** $A \in \mathcal{O}$ に射 $1_A = \text{id}_A: A \rightarrow A$ が対応する. 即ち 写像 $I: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$, $I(A) = 1_A$ が与えられ,

$$S(1_A) = A = T(1_A), \quad \therefore SI = 1_{\mathcal{M}} = TI$$

(4) **射の合成** (合成可能な, 即ち) $S(g) = T(f)$ をみたす射の対 $(g, f): A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ に**合成射** $g \circ f: A \rightarrow C \in \mathcal{M}$ が対応する, 即ち, $S(g \circ f) = S(f)$, $T(g \circ f) = T(g)$ であり, 写像

$$\circ: \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \circ(g, f) = g \circ f \quad (\mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} := \{(g, f) \mid g, f \in \mathcal{M}, S(g) = T(f)\})$$

が与えられている. 尚, $S, T, I, \circ$ の4つを圏の構造写像 (structure map) ということがある.

これらは (写像の場合と同様の) 次の2つの関係をみたす:

- (i) (単位性) $f: A \rightarrow B \in \mathcal{M}$ に対し, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$,
- (ii) (合成の結合法則) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ に対し, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

対象 $A, B \in \mathcal{O}$ 間の射全体 $\{f \in \mathcal{M} \mid S(f) = A, T(f) = B\} = \{f: A \rightarrow B \in \mathcal{M}\}$ を

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), \quad \text{Hom}(A, B), \quad \mathcal{C}(A, B)$$

等と表す. 圏においては $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ は**集合**である, とし, **Hom 集合 (hom-set)** という.

一般的な Gödel-Bernays の公理系による集合論では, 集合や集合全体等を **class (類)** といい, 集合にならない class を proper class という. 対象全体 $\mathcal{O}$, 射全体 $\mathcal{M}$ が class である metacategory を**圏**という. $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ が集合であるものを **small category (小圏)** といい, 上の例の様に, $\mathcal{O}, \mathcal{M}$ が class である圏を **large category (大圏)** という. また,

参考 S. Mac Lane: Categories for the working mathematician においては巨大な集合 universe U を一つ定め, その中で圏論を展開する. U は次をみたす (構成的集合を全て含む) ものとする:

- (1) $\omega := \{0, 1, 2, \dots\} \in U$ ($0 = \emptyset$). (2) $a \in A \in U \Rightarrow a \in U$. (3) $A, B \in U \Rightarrow \{A, B\}, (A, B), A \times B \in U$.
- (4) $A \in U \Rightarrow \mathcal{P}A (= 2^A), \cup A \in U$. (5) $f: A \rightarrow B$ 全射, $A \in U, B \subset U \Rightarrow B \in U$.

圏は $\mathcal{O}, \mathcal{M} \in U$, 又は $\mathcal{O}, \mathcal{M} \subset U$ である metacategory とする. 従って, $S, T, I, \circ$ は集合間の写像である. また, $\mathcal{O}, \mathcal{M} \in U$ のとき, $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ を小圏, $\mathcal{O}, \mathcal{M} \subset U$ のとき, $\mathcal{C}$ を大圏という. ここで, $A \in U$ を (small) set, $A \subset U$ ($A \notin U$) を proper class ということにすると上記に対応する.

関手 (functor) 関手とは圏の間の射である.

圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手 F は, 対象関数 (object function) $F : \mathcal{O}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{D})$ と射関数 (morphism function) $F : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{D})$ からなり ($F(A), F(f)$ は FA, Ff とも表す), $F(1_A) = 1_{FA}$, かつ $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対し, $Ff : FA \rightarrow FB$, $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ のとき F を共変関手 (covariant functor), $Ff : FB \rightarrow FA$, $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$ のとき F を反変関手 (contravariant functor) という.

例 位相空間 X にホモロジー群 $H_n(X)$ を, 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に準同型 $f_* = H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ を割り当てる対応は, 位相空間の圏 $\mathcal{Top}$ から加群の圏 $\mathcal{Mod}$ への共変関手である. また, X にコホモロジー群 $H^n(X)$ を, $f : X \rightarrow Y$ に準同型 $f^* = H^n(f) : H^n(Y) \rightarrow H^n(X)$ を割り当てる対応は反変関手である.

$$H_n : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Mod} \text{ (共変)}, H^n : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Mod} \text{ (反変)}$$

以下, 関手は共変関手とする.

自然変換 (natural transformation) 関手 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し, 自然変換 $\tau : F \rightarrow G$ は

写像 $\tau : \mathcal{O}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{D})$, $A \mapsto \tau_A = \tau A : FA \rightarrow GA$ で, $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ に対し, 次が可換なものとする:

$$\begin{array}{ccc} A & & FA \xrightarrow{\tau_A} GA \\ \downarrow f & \mapsto & \downarrow Ff \quad \downarrow Gf \\ B & & FB \xrightarrow{\tau_B} GB \end{array}$$

(注) $\circ, ()$ はしばしば略され, $g \circ f$ は gf , $(hg)f = h(gf)$ は hgf と書かれる.

参考

opposite category (逆圏) と反変関手 圏 $\mathcal{C} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$ の opposite category $\mathcal{C}^{\text{op}}$ とは, $\mathcal{O}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \mathcal{O}$ で, 射 $f^{\text{op}} \in \mathcal{M}(\mathcal{C}^{\text{op}})$ は $f \in \mathcal{M}$ を逆向きにしたもの, 即ち,

$$f : A \rightarrow B \in \mathcal{M} \implies f^{\text{op}} : B \rightarrow A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}^{\text{op}}), \quad \mathcal{M}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \{f^{\text{op}} \mid f \in \mathcal{M}\}$$

である. 従って $(gf)^{\text{op}} = f^{\text{op}}g^{\text{op}}$ で, $\mathcal{C}^{\text{op}}$ は圏になる.

(逆圏は dual category (双対圏) ともいわれ, $\mathcal{C}^*$ とも表される.)

反変関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し, 共変関手 $F^{\text{op}} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ が,

$$F^{\text{op}}(A) = FA \quad (A \in \mathcal{O}), \quad f : A \rightarrow B \in \mathcal{M} \implies F^{\text{op}}(f^{\text{op}}) = Ff : FB \rightarrow FA$$

で定められるので, 関手は全て共変関手とし, 反変関手は $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ と表されることも多い.

例 Euclid 単体複体と単体写像の圏 (小圏).

単体圏 (simplicial category) = 有限順序数と順序を保つ写像の圏 Δ : $\mathcal{O}(\Delta) = \{[0], [1], [2], \dots, [n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}\}$. $f : [m] \rightarrow [n] \in \mathcal{M}(\Delta)$ は順序を保つ写像 ($i \leq j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$). f は, $d_n^i : [n-1] \rightarrow [n]$, (i を省く, i.e.,) $d_n^i(j) = j$ ($j < i$), $= j+1$ ($j \geq i$) と, $s_n^i : [n+1] \rightarrow [n]$, ($i, i+1$ を i にうつす) $s_n^i(j) = j$ ($j \leq i$), $= j-1$ ($j > i$) の合成で表される. これゆえ, $\mathcal{M}(\Delta)$ の代わりに $\{d_n^i, s_n^i\}_{n \geq 0}$ とも書かれる.

関手 $\Delta : \Delta \rightarrow \mathcal{Top}$, $\Delta[n] = \Delta^n$ (標準 n -単体). $\Delta f : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$ は頂点の順序を保つ線形写像. この像 $\Delta\Delta$ は Δ と同型な $\mathcal{Top}$ の部分圏で, (標準) 単体の圏ともいわれる.

圏 $\mathcal{Cat}$: 対象は小圏全体, 射は関手.

関手圏 (functor category) $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$: 対象は圏 $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手全体, 射は自然変換.

(反変) 関手 $S : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Set}$ ($\in \mathcal{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$) を simplicial set (単体集合) という. $S(d_n^i), S(s_n^i)$ を ∂_n^i, δ_n^i と表す.

特異単体集合 $S_*(X) = \{S_n(X), \partial_n^i, \delta_n^i\}_{n \geq 0}$, $S_n(X) = \{\sigma : \Delta^n \rightarrow X\}$ がその例になる.

Δ' を単射のみからなる Δ の部分圏とする ($\Delta' = (\{[n]\}_n, \{d_n^i\}_n)$) と $S : (\Delta')^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{Set}$ は抽象単体複体.