

応用線形代数演習問題のヒントと解答

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系

福田光浩

2016年度 第1クォーター

ヒントと解答は一部の問題に対して与えられています。それらの問題では基本的な定義にもどって、ヒント、証明、および解答を与えています。証明のやり方は当然ながら1つではありませんので、自分で考えたものと異なるから間違っていると決めつけることはありません。最初からここで与えられている解答を真似するのではなく、自分でじっくりと考えて証明を試みてください。一番大切なのは基本的な定義を正確に理解し、そこから出発して議論を積み上げていくことです。

このノートには誤植などがあるかもしれませんが、その時は指摘してください。

[問題 01-01] 省略。

[問題 01-02] 省略。

[問題 01-03] 省略。

[問題 01-04] 省略。

[問題 02-01] $\Downarrow$ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ が線形従属であると仮定すると、

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \text{ かつ } (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T \neq \mathbf{0} \quad (1)$$

となる $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が存在する。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ のうち少なくとも1つが0でないから、それを α_i とすると、(1) より、 $\mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} -\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{a}_j$ を得る。よって、 $\Downarrow$ は証明された。

$\Uparrow$ $\mathbf{a}_i$ が残り $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ の線形結合として表されていると仮定する。すなわち、 $\mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{a}_j$ と仮定する。ここで、 $\alpha_i = -1$ と定義すると(1)を得るので、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ は線形従属となる。

[問題 02-02] (i) 省略。

(ii) 任意の実数 $x_1, x_2, \dots, x_m$ に対して、

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

を仮定し, $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ であることを示す. $1 \leq i \leq m$ となる添字 i を任意に固定し, (2) の両辺に $\mathbf{a}_i$ との内積をとると, $(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_j = 0$ ($i \neq j$) より,

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{0} = (\mathbf{a}_i)^T (x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_m \mathbf{a}_m) \\ &= x_1 (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_1 + x_2 (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_2 + \cdots + x_m (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_m \\ &= x_1 (\mathbf{a}_i)^T (\mathbf{a}_i) \end{aligned}$$

を得る. さらに, 仮定より $(\mathbf{a}_i)^T \mathbf{a}_i = \|\mathbf{a}_i\|^2 \neq 0$ であるから, $x_i = 0$ でなければならない. 添字 i は任意であったので, $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$ が示された.

[問題 02-03] 掲載予定はあるが, 時期は未定.

[問題 02-04] 省略.

[問題 02-05] (i) 省略.

(ii) 次の例について考えよ.

$$m = 2, \quad n = 3, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[問題 03-01] 線形結合による表現—線形方程式系を

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表現し, 左辺の 2 本のベクトルと右辺の 1 本のベクトルを図示し, 線形方程式系の解をこの図を用いて説明せよ.

内積による表現—線形方程式系を

$$(1 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4, \quad (-1 \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2$$

と表現し, 各等式を満たす $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を図示し, 線形方程式系の解をこの図を用いて説明せよ.

[問題 03-02] 省略.

[問題 03-03] 十分性: 線形方程式系

$$\sum_{j=1}^r \mathbf{a}_{.j} x_j = \mathbf{b} \tag{3}$$

が解 $x_1, x_2, \dots, x_r$ をもつと仮定する．このとき， $x_i = 0$ ($i = r+1, r+2, \dots, n$) と定めると， $x_1, x_2, \dots, x_n$ は線形方程式系

$$\sum_{j=1}^n a_{.j} x_j = b \quad (4)$$

の解となる．

必要性： $x_1, x_2, \dots, x_n$ を線形方程式系 (4) の解とする．添字 $1, 2, \dots, n$ のうち， $x_1, x_2, \dots, x_n$ が 0 でない最大の添字を i とすると

$$\sum_{j=1}^i a_{.j} x_j = b \quad (5)$$

となる．もし $i \leq r$ であれば， $x_1, x_2, \dots, x_r$ は線形方程式系 (3) の解となるから，必要性は示された． $i \geq r+1$ と仮定する． $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}$ は線形独立， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}, a_{.i}$ は線形従属であるので， $a_{.i} = \sum_{j=1}^r \alpha_j a_{.j}$ となり， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ が存在する（何故か）．これを (5) と合わせると，

$$b = \sum_{j=1}^i a_{.j} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_{.j} x_j + \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j a_{.j} \right) x_i = \sum_{j=1}^r (x_j + \alpha_j x_i) a_{.j} + \sum_{j=r+1}^{i-1} x_j a_{.j}$$

を得る．ゆえに，

$$x'_j = x_j + \alpha_j x_i \quad (j = 1, 2, \dots, r), \quad x'_k = x_k \quad (k = r+1, r+2, \dots, i-1)$$

とおくと， $x'_1, x'_2, \dots, x'_{i-1}$ は線形方程式系 $\sum_{j=1}^{i-1} a_{.j} x_j = b$ の解である． $i-1 = r$ であれば，(3) の解が得られる．そうでなければこの操作を (3) の解が得られるまで続けられよい．

[問題 03-04] 仮定と階数の定義より， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) = r$ である．

必要性： 線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j} x_j = b$ が解 $x_1, x_2, \dots, x_r$ をもつと仮定する．階数の定義より， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) \geq \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) = r$ であるから， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) \leq r$ を示せばよい． $\sum_{j=1}^r a_{.j} x_j - b = 0$ が成り立つから， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}, b$ は線形従属である．ゆえに， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) \leq r$ になる．

十分性： $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) = r$ と仮定する．このとき $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}, b$ は線形従属となるから，線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j} y_j + y_{r+1} b = 0$ は自明でない解（すべての y_j が同時に 0 とならない解） $y_1, y_2, \dots, y_{r+1}$ をもつ．ここで， $y_{r+1} = 0$ と仮定すると， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}$ が線形独立であることに反する．したがって， $y_{r+1} \neq 0$ ．ゆえに， $x_j = -y_j / y_{r+1}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) とおくと， $x_1, x_2, \dots, x_r$ は $\sum_{j=1}^r a_{.j} x_j = b$ の解となる．

[問題 03-05] (a) 行列 $(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n})$ の階数を r とする． $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.n} \in \mathbb{R}^m$ の添字を適当に付け替えることにより， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}$ は線形独立，また，任意の $i \geq r+1$ に対して， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}, a_{.i}$ は線形従属になると仮定できる．このとき，

$$\begin{aligned} r &= \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}), \\ r &\leq \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n} \ b) \leq r+1 \end{aligned}$$

が成り立つ（後者が成り立つのは何故か）．[問題 03-03] より，線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が解をもつためには線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j}x_j = b$ が解をもつことが必要十分である．さらに，[問題 03-04] より，線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j}x_j = b$ が解をもつためには， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b)$ が必要十分な条件である．ゆえに，線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が解をもつためには，

$$\begin{aligned} \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) &= \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r}) \\ &= \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.r} \ b) \\ &= \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n} \ b) \end{aligned}$$

が必要十分であることが示された．

(b) 必要性：線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が一意的な解 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をもつと仮定する．(a) より， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n})$ である．また，階数の定義より， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) \leq n$ である．ここで， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) \leq n-1$ と仮定すると，線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}y_j = 0$ は，自明でない解（すべての y_j が同時に 0 とならない解） $y_1, y_2, \dots, y_n$ をもつ．したがって， $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$ は $x_1, x_2, \dots, x_n$ とは異なる線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ の解となり，最初に仮定したこの線形方程式系の解の一意性に矛盾する．よって， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) = n$ が示された．

十分性： $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) = n$ を仮定する．まず，(a) により，線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が異なる 2 つの解 $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ と $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ をもつと仮定して矛盾を導けばよい．ここで， $x_j = x_j^2 - x_j^1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) と定めると， $x_1, x_2, \dots, x_n$ は線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = 0$ の自明でない解になる．よって， $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.n}$ は線形従属になり， $\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}) = n$ に矛盾する．

[問題 03-06] 省略．

[問題 03-07] 解説： $m = 2, n = 3$ について考える．

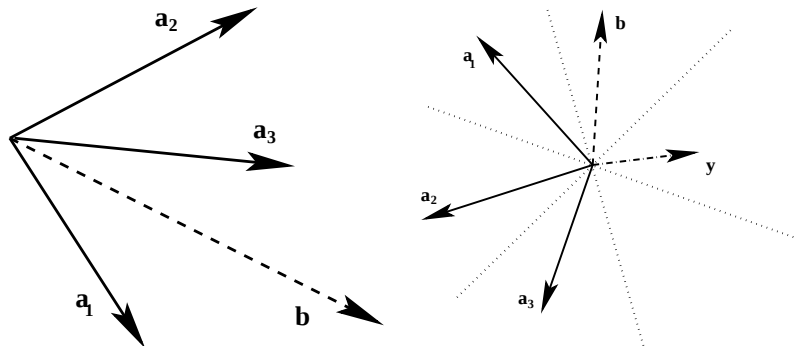


図 1: $m = 2, n = 3$ の場合に限定した Farkas の補題．左が (a) のケースで右が (b) のケースの例．

(a) $P = \{\sum_{i=1}^n a_i x_i \mid x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ と定義すると, (a) が解をもつ $\Leftrightarrow b \in P$ が成り立つ. 図 (左) の場合には, 集合 P はベクトル a_1, a_2 ではさまれた扇形の領域になる. この領域 P に b が含まれるときに (a) が解をもつ.

一方で, (b) $Q = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (a_i)^T y \leq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ を定義する. このとき, $y \in \mathbb{R}^2$ が (b) の解である $\Leftrightarrow y \in Q$ かつ $b^T y > 0$ が成り立つ. 図 (右) の場合には, 集合 Q は原点から右に伸びている錐に相当し, b との角度が 90° 以下になるように y をとれる.

さらに, (a) もしくは (b) しか成り立たないという考察があるとさらによい.

なお, 『(a) が解をもつ』 $\Leftrightarrow$ 『(b) が解をもたない』 に関しては答えを省略する.

[問題 03-08] 掲載予定はあるが, 時期は未定.

[問題 04-01] ヒント: a_1 と a_2 の間の角度を θ , a_1 と a_2 の内積および a_1, a_2 が作る平行四辺形との関係を用いよ.

[問題 05-01] 注意: 計算が終了したら, 必ず検算せよ.

[問題 05-02] 省略.

[問題 06-01] ヒント: $W = \{T(x) \mid x \in S\}$ とおいて, W がベクトル部分空間であることの定義を満たすことを上記の (i), (ii) の定義に基づいて証明すればよい.

[問題 06-02] 省略.

[問題 06-03] ヒント: $S = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ とおくと, 例えば

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

は S の基底になっている.

[問題 06-04] (a) $\Rightarrow$ (b): まず (a) を仮定する. 任意の b に対して, $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ は線形従属であるので, 線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_j y_j + b y_{n+1} = 0$ は自明でない解 (全ての y_j が同時に 0 とならない解) $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ をもつ. ここで, もし $y_{n+1} = 0$ と仮定すると, $a_1, a_2, \dots, a_n$ が線形独立であることに反する. したがって, $y_{n+1} \neq 0$ となる. ゆえに, $x_j = -y_j / y_{n+1} \ (j = 1, 2, \dots, n)$ とおくと, $x_1, x_2, \dots, x_n$ は $\sum_{j=1}^n a_j x_j = b$ の解となる. つまり, b は $a_1, a_2, \dots, a_n$ の線形結合として表現できた. さらに b の $a_1, a_2, \dots, a_n$ の線形結合による表現が 2 通りあるとして, 矛盾を導けばよい.

(b) $\Rightarrow$ (a): 省略.

[問題 06-05] 解説: S と T は集合なので, $S = T$ を示すには, $S \subseteq T$ および $T \subseteq S$ の両方を見せればよい—これが 2 つの集合が等しいことを示す常とう手段である (2 つの集合が等しいというのはどのように定義されているかを考える必要がある). 仮定より, $S \subseteq T$ なので, $T \subseteq S$ のみを見せればよい. この包含関係を示すには,

$$x \in T \Rightarrow x \in S$$

を示せばよい—これも集合の包含関係を示す常とう手段である．以下，証明例を2つ書く．

(a) 丁寧な証明： $\dim(S) = \dim(T) = m$ とする． $S \subseteq T$ が仮定されているので， $T \subseteq S$ を示せばよい． S はベクトル部分空間なのでその基底を a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ととることができる． $S \subseteq T$ なので $a_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots, m$) であり，さらに線形独立である（なぜか？）． $\dim(T) = m$ であり，基底および次元の定義より a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) は T の基底にもなる．したがって，任意の $x \in T$ は a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) の線形結合で表せる．仮定より $a_i \in S$ ($i = 1, 2, \dots, m$) であり，かつ， S は $\mathbb{R}^n$ のベクトル部分空間であるので，そのような x は S に含まれる．ゆえに， $T \subseteq S$ が証明された．

(b) 省略可された証明： a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) を S の基底とする． $S \subseteq T$ より， $a_i \in S$ ($i = 1, 2, \dots, m$) は T に含まれる．また， m 本のベクトル a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) は S の基底であるから線形独立であり，かつ， $\dim(T) = m$ であるから，基底および次元の定義より， a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) は T の基底にもなる． $\mathbb{R}^n$ の2つのベクトル部分空間 S と T に共通の基底 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) がとれるので $S = T$ となる．

線形代数がよくわかっていれば(b)でもよいが，最初はすべての定義までもどって証明の訓練をすればよい．この問題の場合には，ベクトル部分空間，基底，次元などの定義である．例えば，(a)においても「任意の $x \in T$ は a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) の線形結合で表せる」はなぜか．(b)においても「ベクトル部分空間 S と T に共通の基底 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) がとれるので $S = T$ となる」はなぜか．基底の定義にもどってきちんと理解しておく必要がある．

両方の証明とも「ベクトル部分空間 S と T に共通の基底 a_i ($i = 1, 2, \dots, m$) がとれる」が証明の本質的な部分になっている．

[問題 06-06] 省略．

[問題 06-07] 省略．

[問題 06-08] 省略．

[問題 06-09] ヒント： $W = \bigcap_{S \in \Omega} S$ とおく．任意の $x, y \in W$ および $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$x + y \in W \quad \text{かつ} \quad \alpha x \in W$$

を示せばよいことになる．そのためには

$$z \in W \Leftrightarrow z \in S \quad (\forall S \in \Omega)$$

であることを用いればよい．

[問題 06-10] (i) X を含む（集合の包含関係に関して）最小のベクトル部分空間を X の張る空間とよび， $\text{span}(X)$ と書く．

(ii) $W = \bigcap_{S \in \Omega} S$ とおく． $\text{span}(X) = W$ を示せばよい．まず，問題 06-09 より W は $\mathbb{R}^n$ のベクトル部分空間である．それで W が集合の包含関係の意味で X を含む最小のベク

トル部分空間であることを示せばよい． T を X を含む任意のベクトル部分空間とすると， T は Ω の元であるので， $T \supseteq \bigcap_{S \in \Omega} S$ となるので，結局 $\bigcap_{S \in \Omega} S = W$ を得る．

(iii) $V = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)\}$ とおく． $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ とすると， $\lambda_i^x, \lambda_i^y \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, m)$ が存在して $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^x \mathbf{a}_i$ ， $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^y \mathbf{a}_i$ となる．ゆえに， $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m (\lambda_i^x + \lambda_i^y) \mathbf{a}_i$ となるので， $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ である．同様に $\forall \mathbf{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha \mathbf{x} \in V$ を示すことができるので， V は $\mathbb{R}^n$ のベクトル部分空間である．次に (ii) で定義した Ω を用い，任意の $S \in \Omega$ に対して， $V \subseteq S$ であることを示せばよい．つまり任意の $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i \in V$ に対して， S にも属することを示せばよい．しかし， S が X を含むベクトル部分空間であるので，問題 06-02 より， $\mathbf{x} \in S$ であるので主張が成立する．

[問題 06-11] ヒント： 問題 06-10 を用いよ．

[問題 07-01] 最初に，任意の $\mathbf{a} \in S$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 &= \|\mathbf{b} - \mathbf{c} + \mathbf{c} + \mathbf{a}\|^2 \\ &= \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (6)$$

が成り立つことに注意する．

($\Rightarrow$) $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \geq \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$ for $\forall \mathbf{a} \in S$ を仮定する．このとき，

$$0 \leq \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2 + 2(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \quad \text{for } \forall \mathbf{a} \in S$$

が成り立つ．特に， $0 \neq \mathbf{x} \in S$ を固定して， $\mathbf{a} = \mathbf{c} - \lambda \mathbf{x}$ ， $\lambda \in \mathbb{R}$ をとることにより，上記より

$$\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{for } \forall \lambda \neq 0$$

が得られる．これより， $(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T \mathbf{x} = 0$ が（なぜか： λ を横軸， $\lambda^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{c})^T \mathbf{x}$ を縦軸のグラフを用いて考えよ） $0 \neq \mathbf{x} \in S$ に対して示された．

($\Leftarrow$) $\mathbf{a}^T(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$ for $\forall \mathbf{a} \in S$ を仮定する．このとき，(6) より，

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|^2 \geq 0, \quad \text{for } \forall \mathbf{a} \in S$$

を得る．

[問題 07-02] $\mathbf{c}^1 \in S$ と $\mathbf{c}^2 \in S$ を $\mathbf{b}$ の S 上の直交射影として， $\mathbf{c}^1 = \mathbf{c}^2$ を示す．直交射影の定義より， $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}^1\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}^2\|^2$ である．さらに，[問題 07-01] で証明した定理の結果と (6) より，

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{c}^2\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}^1\|^2 + \|\mathbf{c}^1 - \mathbf{c}^2\|^2$$

が成り立つ．ゆえに， $\|\mathbf{c}^1 - \mathbf{c}^2\| = 0$ であるので，ノルムの定義より $\mathbf{c}^1 = \mathbf{c}^2$ となる（注意： $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}^2\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}^1\|^2$ だけでは， $\mathbf{c}^1 = \mathbf{c}^2$ を意味しない）．

[問題 07-03] 省略．

[問題 07-04] ヒント： $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$ となるゼロベクトルでない $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ が存在すると仮定すると， $(\mathbf{A} \mathbf{x})^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = 0$ となる．

[問題 07-05] 解説とヒント： n 次曲線

$$y = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$$

のあてはめの数値データを (x_j, y_j) ($j = 1, 2, \dots, m$) とする．このとき，対象となる線形方程式系は

$$\alpha_0 x_j^n + \alpha_1 x_j^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x_j + \alpha_n = y_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

である．ただし，ここでは $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ が変数である．

[問題 09-01] 省略．

[問題 09-02] (a) S と T を $\mathbb{R}^n$ の 2 つの独立なベクトル部分空間とする． $z \in S \oplus T$ とすると，直和の定義より， $z = x_1 + y_1$ を満たす $x_1 \in S$ ， $y_1 \in T$ が存在する．一意性を示すには， $x_2 \in S$ ， $y_2 \in T$ も $z = x_2 + y_2$ を満たすと仮定して， $x_1 = x_2$ ， $y_1 = y_2$ を導けばよい．まず，仮定より， $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ であるので， $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ を得る．この等式の左辺は S に属し，右辺は T に属す．よって，

$$x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in S \cap T$$

となる．また， S と T が独立であると仮定したので， $S \cap T = \{0\}$ である．したがって， $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0$ でなければならないので， $x_1 = x_2$ と $y_1 = y_2$ が示せた．

(b) ヒント： S の基底を $a_1, a_2, \dots, a_p$ ， T の基底を $b_1, b_2, \dots, b_q$ とする．このとき， $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ が $S \oplus T$ の基底になっていることを示せばよい．[問題 09-04 (d)] を参照．

[問題 09-03] 定理 9.4 の証明と似ているが，正規直交基底をとる必要がないことに注意せよ．ポイントは $T \cap U = \{0\}$ を示すところにある．

[問題 09-04] A の行空間と A の核をそれぞれ

$$S = \{A^T \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m\}, \quad T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = 0\}$$

とおく．一般に， W を $\mathbb{R}^n$ のベクトル部分空間としたとき，その直交補空間 $W^\perp$ は

$$W^\perp = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{u} = 0, \text{ for } \forall \mathbf{v} \in W\}$$

で定義される．よって，この問題で証明すべきことは，以下の 4 つである．

(a) $T \subseteq S^\perp$

(b) $S^\perp \subseteq T$

(c) $S \subseteq T^\perp$

(d) $T^\perp \subseteq S$

上記の (a) と (b) は $T = S^\perp$ を意味し，(c) と (d) は $S = T^\perp$ を意味する．(a),(b),(c) は直交補空間の定義を丁寧に確かめればわかることである．最後の (d) は定理 9.3 より， $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$ ， $\mathbb{R}^n = T \oplus T^\perp$ が得られる．さらに系 9.4 より，上記の (a)，(b) から $n = \dim(S) + \dim(S^\perp) = \dim(S) + \dim(T)$ となる．同様に $\mathbb{R}^n = T \oplus T^\perp$ であるので， $n = \dim(T) + \dim(T^\perp)$ となり，結局 $\dim(T^\perp) = \dim(S)$ である．このことと，(c) および問題 06-05 より (d) が導き出せる．

[問題 09-05] ヒント: (a) および (b) は, [問題 07-01] と [問題 07-02] を参照. (c) に関しては, 講義資料を参照.

[問題 09-06] ヒント: (a) と (b) は省略.

(c) [問題 06-11] の (iii) をヒントに用いよ.

(d) ヒント: 以下の (i), (ii), (iii) を示せばよい.

(i) $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m$ が U に含まれている.

(ii) $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m$ が線形独立である.

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i = 0$$

と仮定すると,

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j v_j = - \sum_{i=1}^m \beta_i w_i \in V \cap W = \{0\}$$

より得られる.

(iii) 任意の $u \in U$ に対して, $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m, u$ は線形従属.

$u \in U$ とすると, $u = v + w$ を満たす $v \in V, w \in W$ が存在する. $v_1, v_2, \dots, v_k$ は V の基底であるから, v は $v_1, v_2, \dots, v_k$ の線形結合で表現できる. 同様に, w は $w_1, w_2, \dots, w_m$ の線形結合で表現できる. ゆえに, $u = v + w$ は $v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_m$ の線形結合で表現できる.

[問題 10-01] 省略.

[問題 10-02] $\Rightarrow$ のヒント: x^* が $g(\cdot)$ の最小点であると仮定すると, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と任意の $u \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f(x^*) = g(x^*) \leq g(x^* + \lambda u) = f(x^*) + \lambda \nabla f(x^*)^T u + \frac{\lambda^2}{2} u^T H f(x^*) u$$

が成り立つ. これより,

$$\nabla f(x^*)^T u = 0 \text{ for } \forall u \in \mathbb{R}^n, \quad u^T H f(x^*) u \geq 0 \text{ for } \forall u \in \mathbb{R}^n$$

を導け.

$\Leftarrow$ のヒント: $\nabla f(x^*) = 0$ かつ $H f(x^*)$ が非負定値と仮定する. 非負定値行列の定義より,

$$(x - x^*)^T H f(x^*) (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ.

[問題 10-03] ヒント: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) および (d) $\Rightarrow$ (b) は, 「正定値行列」, 「最小値」, 「極小値」, 「非負定値行列」の定義から直接導かれる. それぞれの定義を数学的に記述できる

ようにしておくこと．(c) $\Rightarrow$ (d) のヒント： (c) を仮定する．このとき，十分小さい ϵ が存在し，

$$\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} \geq \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Q} \bar{\mathbf{x}} = 0 \text{ for } \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ such that } \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| = \|\mathbf{y}\| \leq \epsilon \quad (7)$$

が成り立つ．ゆえに， $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ なる任意の $\mathbf{x}$ をとると，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\epsilon^2} \left(\frac{\epsilon \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right)^T \mathbf{Q} \left(\frac{\epsilon \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \geq 0$$

が成り立つ．最後の不等式は

$$\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\epsilon^2} > 0, \quad \left\| \frac{\epsilon \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \epsilon$$

と (7) より導かれる．

[問題 10-04] 省略．

[問題 10-05] 計算が終了したら，必ず検算すること．

[問題 10-06] 計算が終了したら，必ず検算すること．

[問題 10-07] ヒント： この問題の $\mathbf{Q}$ が非負定値である定義は

$$0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \text{ for } \forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

と変形される．

[問題 10-08] 解説： 2つの $n \times n$ 行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対して， $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ であれば $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ ， $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$ であり，かつ， $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ であることが知られている．

[問題 10-09] ヒント： そのような行列 $\mathbf{Q}$ を対角化すると，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，対角化した空間での等高線は

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_2 y_2^2 = \alpha \right\}$$

の形になる．

[問題 10-10] 計算が終了したら，必ず検算すること．

[問題 10-11] 省略．