

(b) $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ を λ, μ の相異なる固有値に対応する固有ベクトルとする. すなわち,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0}.$$

このとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{y}^T (\lambda\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{y}, \\ \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T (\mu\mathbf{y}) = \mu \mathbf{x}^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

となる. よって,

$$0 = \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = (\lambda - \mu) \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

仮定より, $\lambda \neq \mu$ であるから, $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ を得る. 以上のことから異なる固有値に対する固有ベクトルは直交している. さらに, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ であれば, 両側を $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ で割ることによって

$$\mathbf{A} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \lambda \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$$

ノルムが1の固有ベクトル $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ を得ることができる.

よって, $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_k$ ($k \leq n$) を $\mathbf{A}$ の異なる全ての固有値とし (つまり重複する場合はその一つだけを表す), $W_i := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{p} = \hat{\lambda}_i \mathbf{p}\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) とすると (固有空間と呼ばれる), W_i はお互いに直交しているベクトル部分空間になっていることがわかる. さらに, $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$ となることを n に関して帰納法で示す.

$n = 1$ の場合は明らかである. $\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W_1\} \subseteq W_1$, さらに $\forall \mathbf{y} \in W_1, \forall \mathbf{x} \in W_1^\perp$ に対して $\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T \mathbf{A}\mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y} = \hat{\lambda}_1 \mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ が成り立つので, $\{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in W_1^\perp\} \subseteq W_1^\perp$ となることがわかる. そのため, 直交分解の定理 $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_1^\perp$ より, $\mathbf{A}$ の $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \dots, \hat{\lambda}_k$ に相当する固有ベクトルは $W_1^\perp$ にしか含まれていない. さらに, $n = \dim(W_1) + \dim(W_1^\perp)$ で, $\dim(W_1) \geq 1$ であることから帰納法を用いて, $W_1^\perp = W_2' \oplus W_3' \oplus \dots \oplus W_k'$ はお互いに直交で固有値 $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \dots, \hat{\lambda}_k$ に相当する固有空間 $W_2', W_3', \dots, W_k'$ に分解できる. さらに, $W_i' \subseteq W_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$) は当然成り立つが, $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2' \oplus W_3' \oplus \dots \oplus W_k'$ より, 結局 $W_i' = W_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$) である.

最後に $\mathbf{p}_i$ と $\mathbf{p}_j$ が同じ固有値 λ に対する線形独立な固有ベクトル (例えばその固有空間の基底) であり, $\|\mathbf{p}_i\| = 1$ と仮定する.

$$\mathbf{p}_j' = \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j) \mathbf{p}_i$$

とおくと,

$$\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j' = \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j) \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j = 0$$

が $\|\mathbf{p}_i\|^2 = \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i = 1$ のために成り立つ. さらに

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_j' = \mathbf{A}(\mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j) \mathbf{p}_i) = \lambda \mathbf{p}_j - (\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_j) \lambda \mathbf{p}_i = \lambda \mathbf{p}_j'$$

となる. 最後に $\mathbf{p}_j'' = \frac{\mathbf{p}_j'}{\sqrt{(\mathbf{p}_j')^T \mathbf{p}_j'}}$ より, $\mathbf{p}_i$ と $\mathbf{p}_j''$ はお互いに直交であり, ノルムが1であり, 同じ固有値 λ に相当する固有ベクトルとなる.

□

[問題 10-06]

(a) 問題 10-05 (c) で求めた2つの固有ベクトルは直交しているか検証せよ.

(b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値を求め, 対応する固有ベクトルが直交するように定めよ.

10.4 行列の対角化

[問題 10-07] 2×2 の対角行列 $Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ の固有値は λ_1, λ_2 になるが、この行列が非負定値であるための必要十分条件は $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ であることを証明せよ。

定理 10.4 : Q を n 次対称行列とする。このとき、

Q は非負定値行列 $\Leftrightarrow$ すべての固有値が非負

Q は正定値行列 $\Leftrightarrow$ すべての固有値が正

Q は非正定値行列 $\Leftrightarrow$ すべての固有値が非正

Q は負定値行列 $\Leftrightarrow$ すべての固有値が負

以下では、対角化という手法を用いてこの定理を証明する。 Q を $n \times n$ の対称行列とし、前の定理を満たすように固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ と対応する固有ベクトル $p_1, p_2, \dots, p_n$ をとる。 $n \times n$ 行列 $P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ と定める。

[問題 10-08] 前の定理を満たすように固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ と対応する固有ベクトル $p_1, p_2, \dots, p_n$ をとる。 $n \times n$ 行列 $P = (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ と定める。このとき、 P は直交行列になる、すなわち、 $P^T P = I$ を満たすことを示せ。また、 $PP^T = I$ は成立するか。

このとき、行列 Q と $P^T Q P$ の固有値は同じになる。実際 λ と p を Q の固有値と固有ベクトルとすると

$$Qp = \lambda p, \quad p \neq 0.$$

となる。ここで、 $r = P^T p$ とおくと、 P は直交行列であることから、

$$r \neq 0, \quad Pr = PP^T p = p$$

となる。したがって、

$$P^T Q P r = P^T Q p = \lambda P^T p = \lambda r, \quad r \neq 0$$

を得る。ゆえに、 λ と r は行列 $P^T Q P$ の固有値と固有ベクトルになる。

また、逆に λ と r は行列 $P^T Q P$ の固有値と固有ベクトルとすると、

$$P^T Q P r = \lambda r, \quad r \neq 0$$

となる。したがって、 $p = Pr$ とおくと、

$$Qp = PP^T Q P r = \lambda Pr = \lambda p, \quad p \neq 0$$

である。ゆえに、 λ は Q の固有値で p は λ に対応する Q の固有ベクトルとなる。

ここで、 $P^T Q P$ を計算すると以下ようになる。

$$P^T Q P = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix} Q (p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n) = \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ \vdots \\ p_n^T \end{pmatrix} (Qp_1 \ Qp_2 \ \cdots \ Qp_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \mathbf{p}_1 \ \lambda_2 \mathbf{p}_2 \ \cdots \ \lambda_n \mathbf{p}_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2次形式 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して変数変換 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$ を施す. $\mathbf{P}$ は直交行列であるから, $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ となる. ゆえに,

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = (\mathbf{P} \mathbf{y})^T \mathbf{Q} (\mathbf{P} \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{y} \\ &= (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned}$$

ゆえに, まとめると以下のようなになる.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{すなわち } \mathbf{Q} \text{ は非負定値} \\ \Downarrow \\ \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \Downarrow \\ \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad \text{すなわち, } \mathbf{Q} \text{ のすべての固有値は非負} \end{aligned}$$

よって, 以下のことも言える.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0, \quad \mathbb{R}^n \ni \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \text{すなわち } \mathbf{Q} \text{ は正定値} \\ \Downarrow \\ \mathbf{y}^T \mathbf{P}^T \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{y} > 0, \quad \mathbb{R}^n \ni \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \\ \Downarrow \\ \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad \text{すなわち, } \mathbf{Q} \text{ のすべての固有値は正} \end{aligned}$$

非正定値, 負定値の場合も同様になるので, 固有値に関する定理が証明できたことになる.

注意: 上記の4つの $\Downarrow$ のうち, 1番目と3番目のものは, $\mathbf{P}$ が(直交行列であるため)正則行列であるので成り立つ.

10.5 2次形式の等高線

$\mathbf{Q}$ を $n \times n$ 次元の対称行列, α を実数とする. 2次形式

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

に対して, その等高線(面)

$$C_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\mathbf{x}) = \alpha\}$$

について考える. 前節で行った座標変換 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ をほどこすと, 等高線は新しい座標で

$$C_\alpha := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = \alpha\}$$