

定義 6.1 : S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする . この時 , S の 次元 r は次の条件を同時に満たす正整数のことである .

- (a) S 内に r 本の線形独立なベクトルの組が存在する .
- (b) S 内の任意の $r + 1$ 本のベクトルの組は線形従属である .

また , $\dim(S) = r$ と表記する .

定義 6.2 : S を次元が r である $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする . $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^n$ が S の 基底 であるためには次の条件を同時に満たす必要がある .

- (a) $a_1, a_2, \dots, a_r \in S$.
- (b) $a_1, a_2, \dots, a_r$ は線形独立である .

さらに , $a_1, a_2, \dots, a_r$ がお互いに直交するとき , すなわち

$$(a_i)^T a_j = 0 \quad (i \neq j)$$

のとき , これらのベクトルを S の 直交基底 と呼ぶ . また , $\|a_i\| = 1$ ($i = 1, 2, \dots, r$) のとき , これらのベクトルを 正規直交基底 と呼ぶ .

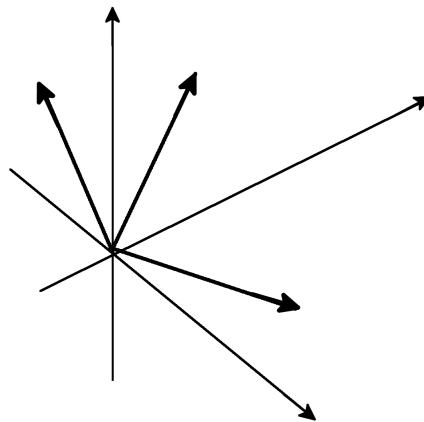


図 15: $\mathbb{R}^3$ における基底の例 .

[問題 06-01] 以下の問いに答えよ .

- (i) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T が線形写像であることの定義を述べよ .
- (ii) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S が部分空間であることの定義を述べよ .
- (iii) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間としたとき , その基底および次元の定義を述べよ .
- (iv) S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間 , T を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像としたとき , S の T による写像 $\{T(x) \mid x \in S\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になることを証明せよ .

[問題 06-02] $\mathbb{R}^m$ の部分集合 S が条件

$$\begin{aligned} S &\neq \emptyset, \\ x \in S, \quad y \in S &\Rightarrow x + y \in S, \\ x \in S, \quad \alpha \in \mathbb{R} &\Rightarrow \alpha x \in S, \end{aligned}$$

を満たすとき, S を $\mathbb{R}^m$ の部分空間であるという. S が $\mathbb{R}^n$ の部分空間ならば, 任意の正整数 n に対して,

$$x_i \in S, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in S$$

が成り立つことを帰納法を用いて証明せよ.

[問題 06-03] 部分空間 $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ の次元および正規直交基底を一つ求めよ.

[問題 06-04] S を $\mathbb{R}^m$ の部分空間, そして $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ とする. 以下の (a) と (b) は同値であることを示せ.

(a) $a_1, a_2, \dots, a_n$ は線形独立であり, かつ, 任意の $b \in S$ に対して, $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ は線形従属である.

(b) 任意の $b \in S$ は $a_1, a_2, \dots, a_n$ の線形結合として一意的に表現できる.

[問題 06-05] S, T は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとする. $S \subseteq T$, $\dim(S) = \dim(T)$ のとき, $S = T$ を示せ.

[問題 06-06] $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ としたとき, 集合

$$S = \{A^T y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathbb{R}^m\} \quad (\text{行列 } A \text{ の行空間とよぶ})$$

は部分空間となることを示せ.

[問題 06-07] $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ としたとき, 集合

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \quad (\text{行列 } A \text{ の核とよぶ})$$

は部分空間となることを示せ.

[問題 06-08] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, 集合 $\{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = 0, \quad \forall x \in X\}$ は部分空間になることを示せ.

定義 6.3 : S を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする.

$$S^\perp := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x = 0, \quad \forall x \in S\}$$

を部分空間 S の直交補空間とよぶ.

定義 6.4 : $X \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して, X を含む (集合の包含関係に関して) 最小の部分空間を X の張る空間 とよび, $\text{span}(X)$ と書く .

定理 6.5 : $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_1, a_2, \dots, a_r \in X$ は線形独立であり, かつ任意の $b \in X$ に対して $a_1, a_2, \dots, a_r, b$ は線形従属であると仮定する . この時 ,

$$(a) \text{span}(X) = \bigcap_{X \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ かつ } S \text{ は部分空間}} S$$

$$(b) \text{span}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, r) \right\}$$

[問題 06-09] Ω を $\mathbb{R}^m$ の部分空間の集まりとする . すなわち, Ω の任意の元 S は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である . ただし, $\mathbb{R}^m$ の全ての部分空間が Ω の元であるとは限らない . このとき, $\bigcap_{S \in \Omega} S$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間になることを証明せよ .

[問題 06-10] $X \subseteq \mathbb{R}^n$ とする .

(i) $\text{span}(X)$ の定義を書け .

(ii) Ω を X を含む全ての $\mathbb{R}^m$ の部分空間の集まりとする . $\text{span}(X) = \bigcap_{S \in \Omega} S$ を証明せよ .

(iii) $X = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ のとき, $\text{span}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2, \dots, m) \right\}$ を証明せよ .

定理 6.6 : $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ に対して, 線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \ni b .$$

である .

[問題 06-11] 次の命題を証明せよ . $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ に対して, 線形方程式系

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \ni b .$$

である .