

3.5 線形方程式系の解の存在について

定理 3 . 1 :

(a) 線形方程式系 $Ax = b$ (3) が解をもつ .

$\Updownarrow$

$$\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n}) .$$

(b) 線形方程式系 $Ax = b$ (3) が唯一の解をもつ .

$\Updownarrow$

$$\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n}) = n .$$

[問題 03-03] $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.n} \in \mathbb{R}^m$ とし, $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}$ は線形独立, また, 任意の $i \geq r+1$ に対して, $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r}, a_{.i}$ は線形従属であると仮定する. この時, 線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が解をもつための必要十分条件は, 線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j}x_j = b$ が解をもつことであることを証明せよ .

[問題 03-04] $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.r} \in \mathbb{R}^m$ を線形独立と仮定する. このとき, 線形方程式系 $\sum_{j=1}^r a_{.j}x_j = b$ が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.r} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.r})$$

であることを証明せよ .

[問題 03-05] $a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.n} \in \mathbb{R}^m$ とする. 以下の (a) と (b) を証明せよ .

(a) 線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が解をもつ .

$\Updownarrow$

$$\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n}) .$$

(b) 線形方程式系 $\sum_{j=1}^n a_{.j}x_j = b$ が唯一の解をもつ .

$\Updownarrow$

$$\text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n} \ b) = \text{rank}(a_{.1} \ a_{.2} \ \dots \ a_{.n}) = n .$$

[問題 03-06] $A = (a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n)$ を $m \times n$ 行列, $b \in \mathbb{R}^m$ とする. ただし, $a^j \in \mathbb{R}^m$ ($j = 1, 2, \dots, n$) とする. この時,

(i) 行列 A の階数の定義を述べよ .

(ii) 線形方程式系 $Ax = b$ が解をもつための必要十分条件は『 A の階数と $m \times (n+1)$ 行列 $(a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n \ b)$ の階数が一致することである』を証明せよ .

系 3.2 : $m = n$ の場合 , 以下の (a) , (b) , (c) , (d) , (e) は全て同値である .

(a) 線形方程式系 (3) は唯一の解をもつ .

(b) $\det \mathbf{A} \neq 0$.

(c) $\mathbf{A}$ は逆行列をもつ .

(d) $\mathbf{a}_{\cdot 1}, \mathbf{a}_{\cdot 2}, \dots, \mathbf{a}_{\cdot n}$ は線形独立である .

(e) $\mathbf{a}_{1\cdot}, \mathbf{a}_{2\cdot}, \dots, \mathbf{a}_{n\cdot}$ は線形独立である .

[問題 03-07] Farkas の補題

$\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ ($i = 1, 2, \dots, n$) , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して , 以下の 2 組の等式・不等式について考える .

$$(a) \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b}, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(b) \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{y} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} > 0$$

この時 ,

$$(a) \text{ が解を持つ} \Leftrightarrow (b) \text{ が解を持たない}$$

が成立する . $m = 2$ の場合について , この命題を図を用いて確かめよ . また , 一般の m, n の場合について , この命題の一部『(a) が解をもつ $\Rightarrow$ (b) が解を持たない』を証明せよ .

[問題 03-08] Gordan の定理

上記の [問題 03-07] と同様の考察を次の (a) , (b) に対して行え .

$$(a) \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq \mathbf{0},$$

$$(b) \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \quad (\mathbf{a}_i)^T \mathbf{y} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

4 行列式

正方行列 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ の 行列式 は以下のような計算式で定義される .

$$\det(\mathbf{A}) := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

ただし , S_n は n 個の要素を置換する写像の集合からなる n 次対称群 であり , $\text{sign}(\cdot)$ は置換写像の符号を表す . つまり ,

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

は $\sigma(1) = i_1, \sigma(2) = i_2, \dots, \sigma(n) = i_n$ を表し ,

$$\text{sign}(\sigma) := \begin{cases} 1, & \sigma \text{ が偶置換のとき} \\ -1, & \sigma \text{ が奇置換のとき} \end{cases}$$

$\det(A)$ を $|A|$ とも表記する .

例：2次元の場合

$A = (a_1 \ a_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ とすると , A の行列式の絶対値 $|\det(A)|$ は a_1 と a_2 で作られる平行四辺形の面積となり , 行列式の符号は a_1 と a_2 の位置に関する『向き』を表している (図 13) .

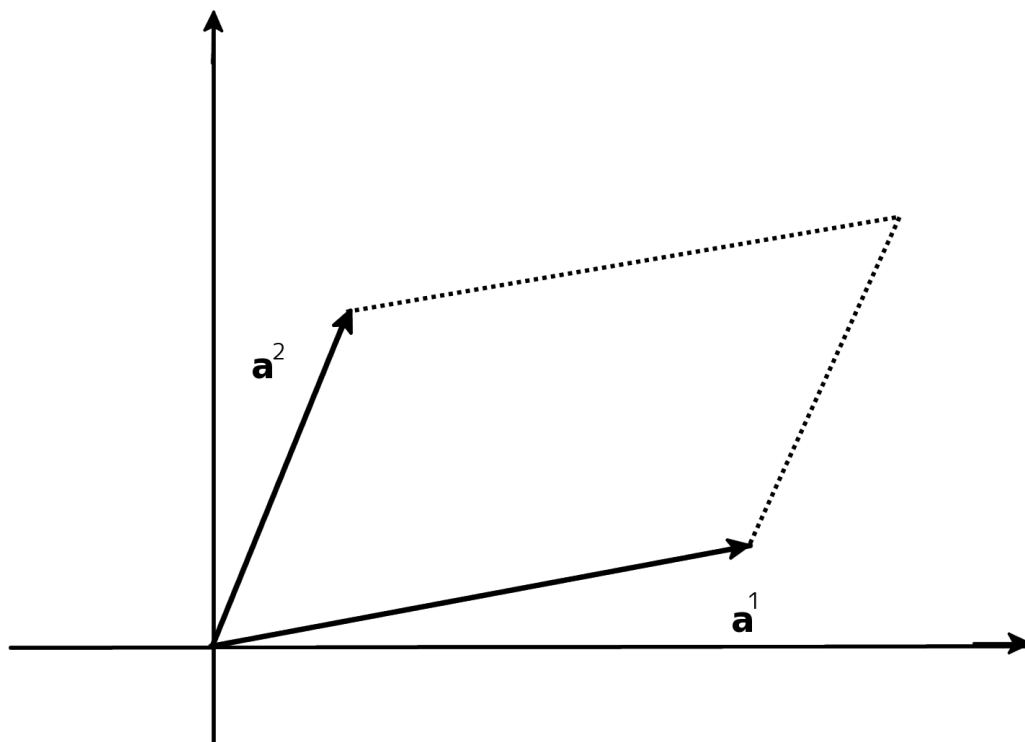


図 13: $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ によって定められた平行四辺形 .

[問題 04-01] $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$, $A = (a_1 \ a_2)$ とする . このとき , a_1, a_2 が作る平行四辺形の面積は $|\det(A)|$ に一致することを示せ .

例：3次元の場合

$A = (a_1 \ a_2 \ a_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ とすると , A の行列式の絶対値 $|\det(A)|$ は a_1, a_2, a_3 で作られる平行六面体の体積となり , a_1, a_2, a_3 はそれらの位置に関する『向き』を表している (図 14) .

定理 4. 1 : $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

$$(a) \det(a_1 \dots a_{i-1} \ \alpha a_i + b \ a_{i+1} \dots a_n) = \alpha \det(A) + \det(a_1 \ a_2 \dots a_{i-1} \ b \ a_{i+1} \dots a_n);$$

$$(b) \det(a_1 \dots a_{i-1} \ a_i + \alpha a_j \ a_{i+1} \dots a_n) = \det(A) \quad (j = 1, 2, \dots, n, \ j \neq i);$$

$$(c) \det(a_1 \dots a_{i-1} \ a_j \ a_{i+1} \dots a_{j-1} \ a_i \ a_{j+1} \dots a_n) = -\det(A) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n \quad i \neq j) .$$

これらは列に関する性質であるが , 行に関しても同様に成り立つ .

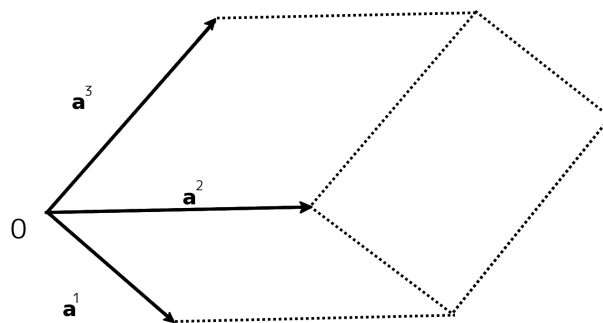


図 14: $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$ によって定められた平行六面体 .

定理 4.2 : A, B, C を適当な次元の行列だとすると

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

が常に成り立つ . さらに ,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad \det(A^T) = \det(A)$$

も成り立つ .

よって , 行列式を計算する場合 , 余因子を用いた展開でも可能であるが , 行列の基本変形 (ある行/列に定数をかけて異なる行/列に足す) を用いて上 (下) 三角行列に変形すると計算が容易にできる .

4.1 外積

定義 4.3 : 実数ベクトル空間である $\mathbb{R}^3$ において , 以下の (演算) 関数 $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を外積と呼ぶ . つまり $a, b \in \mathbb{R}^3$ に対して ,

$$a \times b := \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} e_3.$$

ただし , e_1, e_2, e_3 は $\mathbb{R}^3$ の標準基底とする . 記号の意味を多少乱暴に使うと , 以下のような記憶し易い形になる

$$a \times b := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

定理 4.4 : $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の性質が成り立つ.

1. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ で θ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ がなす角である.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
3. $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

例: 先程の 3 次元での例において $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ とすると, $\mathbf{A}$ の行列式の絶対値 $|\det(\mathbf{A})|$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ で作られる平行六面体の体積となっていたが, この体積は $|(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)^T \mathbf{a}_3|$ として外積と内積を用いても計算できる.

5 線形方程式系の解法, 逆行列と行列式の計算

線形方程式系を解くには Cramer の公式などがあるが, ここではより計算効率のよい Gauss-Jordan と Gauss の消去法を用いる.

5.1 Gauss-Jordan の消去法

例:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 + x_2 & = & 4 & (1) & \\ x_1 + 2x_2 & = & 5 & (2) & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

上記の行列の左側が単位行列になるように 基本演算 を施す.

(1) $\times \frac{1}{2}$ として (3) とおく.

(2) $- (1) \times \frac{1}{2}$ として (4) とおく.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = & 2 & (3) & \\ \frac{3}{2}x_2 & = & 3 & (4) & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)$$

(4) $\times \frac{2}{3}$ として (6) とおく.

(3) $- (4) \times \frac{1}{3}$ として (5) とおく.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & 1 & (5) & \\ x_2 & = & 2 & (6) & \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right)$$

解は $(x_1, x_2) = (1, 2)$ となる.

これらの計算で加減算は合計で 7 回, 乗算は 16 回, 除算は 4 回行ったことになる.

以上の計算により, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して定理 4.1 より,

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{I}) = 1$$