定義２．８： 実数ベクトル空間 V において,（演算）実関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ が定められていて次の性質を満たす時，この関数を 内積 と呼ぶ.

$\forall \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$

(ii) $\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle + \langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$

(iii) $\langle \alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$

(iv) $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle \geq 0$ さらに $\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

２次元における例

$$\text{定数ベクトル } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ と変数ベクトル } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

に対して，それらの内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = a_1x_1 + a_2x_2$ について，内積が0となる等高線，内積が正となる領域，内積が負となる領域を書くと図6のようになる．またこの内積がある定数 c と等しくなる（変数の）集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = a_1x_1 + a_2x_2 = c\}$ は常に直線になることに注意せよ.

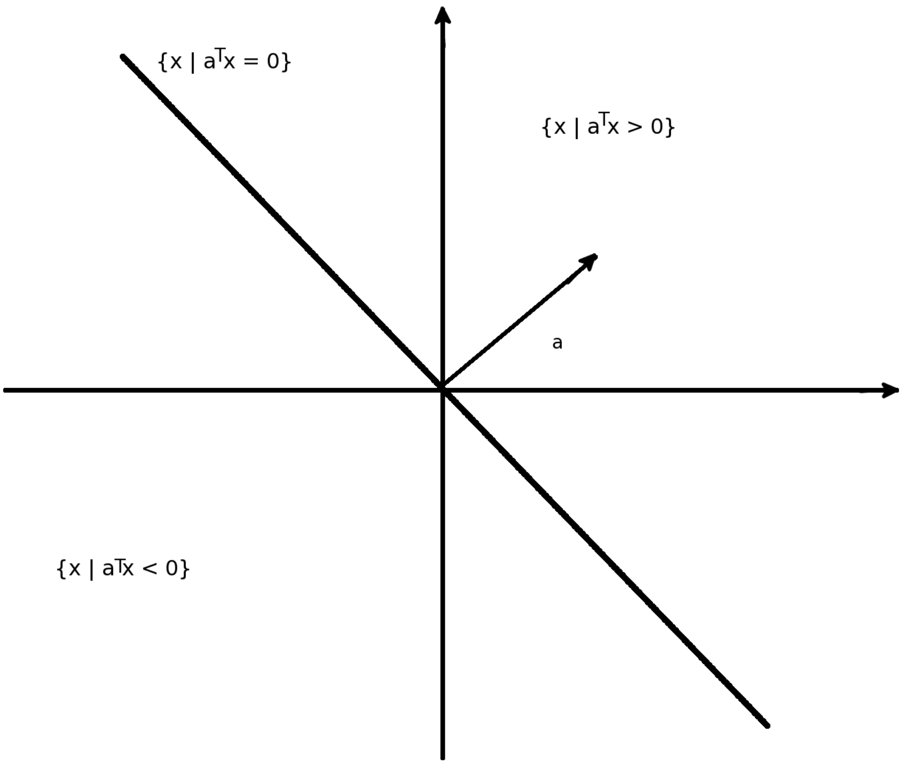

図 6: 内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ によって定義される領域.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ の内積 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ は $\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{x}\|\cos\theta$ と一致する．ただし $\|\boldsymbol{a}\|, \|\boldsymbol{x}\|$ はベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}$ の長さ（ノルム）であり，θ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ がなす角度である（図7参照）.

今後，特に断らない限り，ノルムは上記で定義された内積から定義されたノルムのことを意味する．つまり，$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$ である.

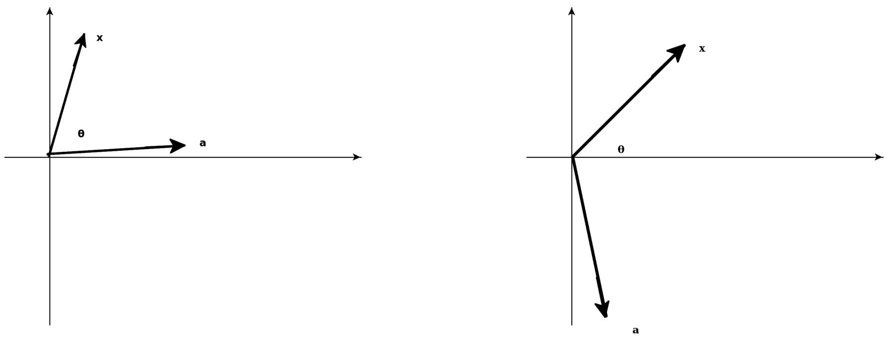

図 7: ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ 間の内積とそれらがなす角度 θ.

2.6 Cauchy-Schwarz の不等式

定義２．９（Cauchy-Schwarz の不等式）： $\mathbb{R}^n$ において内積はノルムから定義されたものとする．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$

[問題 02-03] $\mathbb{R}^n$ において内積はノルムから定義されたものとする．このとき，Cauchy-Schwarz の不等式が成り立つを示せ．

$$|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$

定理２．１０（中線定理，平行四辺形の法則）： $\mathbb{R}^n$ において内積はノルムから定義されたものとする．このとき，以下の等式が成り立つ．

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2), \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$

[問題 02-04] $\mathbb{R}^n$ において内積はノルムから定義されたものとする．このとき，中線定理を示せ．

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2), \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n.$$

2.7 n 次元 Euclid 空間

$\mathbb{R}^n$ が n 次元 Euclid 空間とは $\mathbb{R}^n$ が演算 $+$, $\cdot$ において実ベクトル空間であり，さらに内積が定義されていることを指す．つまり，代数的な性質と幾何学的な性質と位相的な性質を同時に持っている．

代数的な性質

- ベクトル和に関して閉じている： $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$；
- スカラー積に関して閉じている： $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$.

幾何学的な性質

- $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ が例えば 0 であれば，それらのベクトルは直交している．
- $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}$ はベクトルの長さを表す．

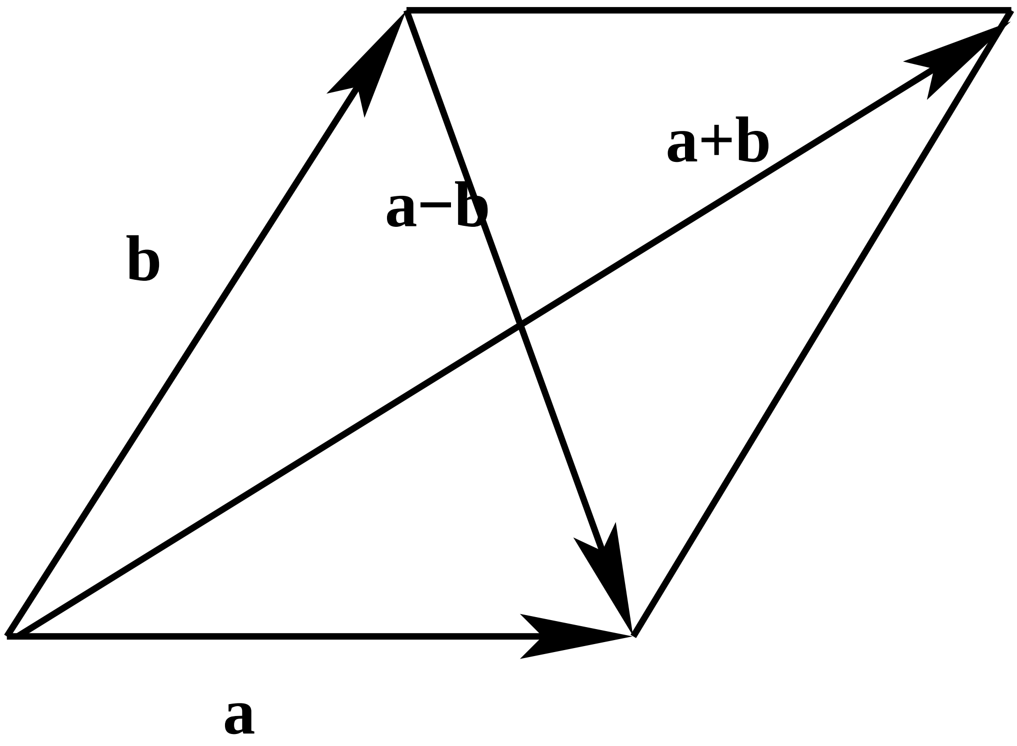

図 8: 中線定理，平行四辺形の法則.

位相的な性質

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対する距離 $\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$ によって $\mathbb{R}^n$ に開集合や閉集合などが定義できる.

2.8 線形写像（変換）

定義２．１１： 実数ベクトル空間 V, W において，写像 $T : V \to W$ が定められていて次の性質を満たす時，この 写像は線形である という.

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$

(ii) $T(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$.

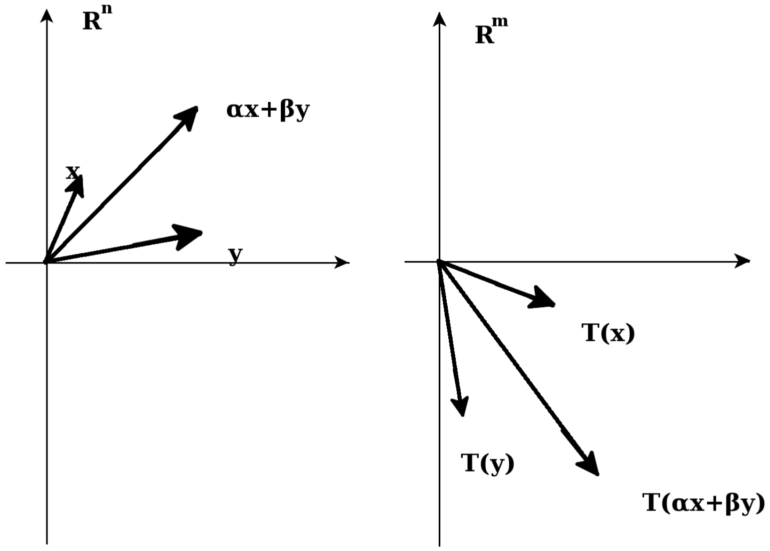

図 9: $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 T.

定義２．１２： $\mathbb{R}^n$ において,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を $\mathbb{R}^n$ の 標準基底 とよぶ.

定理２．１３： $\mathbb{R}^n$ および $\mathbb{R}^m$ の標準基底をそれぞれ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ と $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m$ とすると任意の線形写像 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して

$$T(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{e}'_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

によって $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が定まり，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が成り立つ．逆に任意の行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が与えられた時，$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は線形写像になる.
よって，$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像と $\mathbb{R}^{m \times n}$ の実行列との１対１の対応ができたことになる.

定義２．１４： $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ の階数 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$ が $0 \le r \le \min\{m, n\}$ であるとは次の条件を同時に満たすものである.

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から r 本の線形独立なベクトルの組を選び出せる.

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の任意の $r + 1$ 本のベクトルの組は線形従属である.

注意：$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを用いた定義でも r の値は変わらない.

[問題 02-05] $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ とする．

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であることの定義を述べよ．

(ii) 線形方程式系 $\sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{a}_n$ は解を持たないと仮定する．この時，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立になるか．線形独立になるならば証明せよ．そうでないならば反例をあげよ．

3 線形方程式系（連立一次方程式，連立線形方程式）の表現

n 個の変数と m 本の線形方程式を持つ線形方程式系を次のような表現方法で考える．

3.1 要素による表現

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{3}$$

ただし，$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ は定数，$x_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は変数である．

3.2 線形写像を用いた表現

定数行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，定数ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と定義すると，線形方程式系 (3) は

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

となり，定義域にあるベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の $\boldsymbol{A}$ による線形写像（変換）が値域のベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ になることとして考えられる．

3.3 線形結合による表現

行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{\cdot 1}\ \boldsymbol{a}_{\cdot 2}\ \ldots\ \boldsymbol{a}_{\cdot n}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を列ベクトルを用いて表記すると線形方程式系 (3) は

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{\cdot j} x_j = \boldsymbol{b}$$

となり，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ を m 次元のベクトル n 本の線形結合で表すことになる．

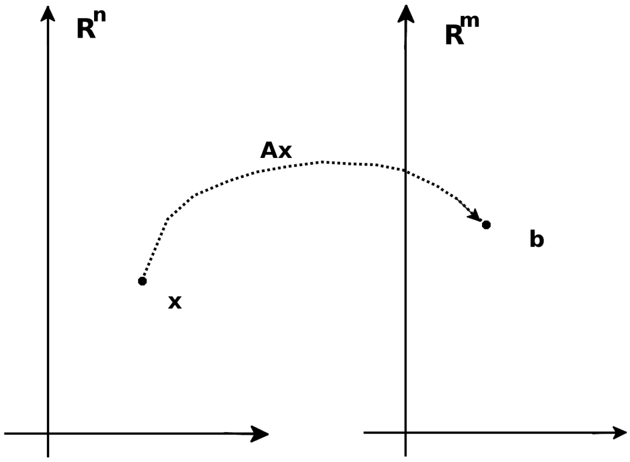

図 10: 線形方程式系の線形変換を用いた表現.

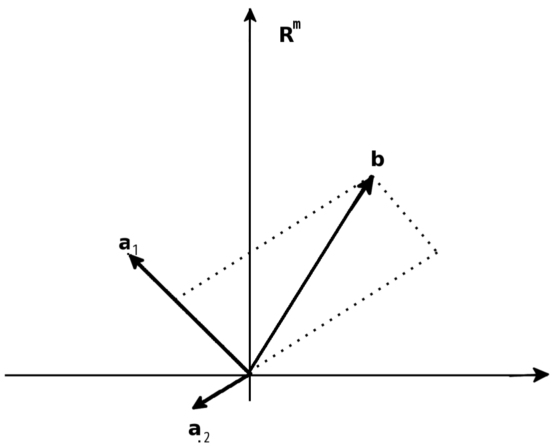

図 11: 線形方程式系の線形結合による表現.

3.4 内積を用いた表現

今度は行列 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1\cdot}^T \\ \boldsymbol{a}_{2\cdot}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m\cdot}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を行ベクトルを用いて表記すると線形方程式系 (3) は

$$\boldsymbol{a}_{i\cdot}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

となる.

さらに,

$$X_i := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a}_{i\cdot}^T \boldsymbol{x} = b_i\} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

と定義すると，線形方程式系 (3) の解は

$$\bigcap_{i=1}^{m} X_i$$

となる．

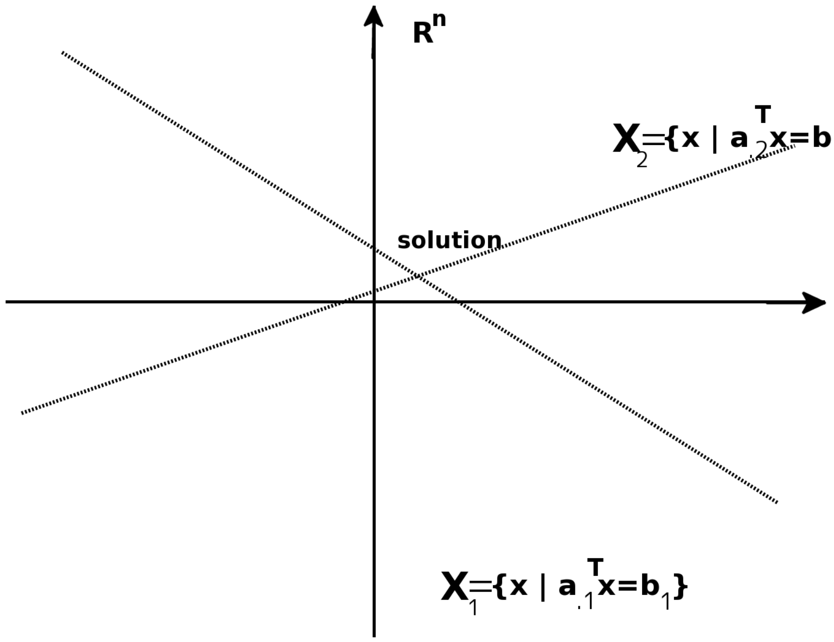

図 12: 線形方程式系の内積を用いた表現.

[問題 03-01] 線形方程式系

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 4 \\ -x_1 + 2x_2 &=& 2 \end{array}$$

を線形結合による表現を用いた解釈および内積表現を用いた解釈に従って図示し，解を求めよ．

[問題 03-02] 線形方程式系

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& \cdots &+& a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& \cdots &+& a_{2n}x_n &=& b_2 \\ && && \vdots && && \\ a_{m1}x_1 &+& a_{m2}x_2 &+& \cdots &+& a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}$$

の『要素による表現』,『線形結合による表現』,『内積を用いた表現』を説明し，それぞれの意味を簡単に説明せよ．ただし，$a_{ij} \in \mathbb{R}$，$b_i \in \mathbb{R}$ は定数であり，$x_j \in \mathbb{R}$ は変数とみなす $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.