2.1 ベクトル空間

定義２．１： ある集合 V が 実ベクトル空間 であるためには，その集合にて以下の条件を満たすベクトル和とベクトルのスカラー (実数）積が定義されていなければならない.

ベクトル和

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$,

(i) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ （交換則）

(ii) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ （結合則）

(iii) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ となる零ベクトル $\boldsymbol{0} \in V$ が存在する. （零ベクトルの存在）

(iv) $\boldsymbol{a} + \bar{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}$ となる逆元 $\bar{\boldsymbol{a}} \in V$ が存在する. （逆元の存在）

スカラー (実数）積

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(v) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$ （スカラー積の結合則）

(vi) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ （スカラーの分配則）

(vii) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ （ベクトルの分配則）

(viii) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ （$\mathbb{R}$ の単位元 1 とのスカラー積）

例：$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}[x]$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\mathcal{C}[0,1]$ など.

定義２．２： ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ とスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ を用いて新たに定義するベクトル $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i$ をベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合（もしくは一次結合）と呼ぶ.

よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合はそのベクトル空間に属する.

2.2 部分空間

定義２．３： ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が，V における和とスカラー積の演算によってベクトル空間になるとき，W を V の (ベクトル）部分空間 という.

定理２．４： ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件は

(i) $W \neq \emptyset$

(ii) $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

(iii) $\forall \boldsymbol{a} \in W,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha\boldsymbol{a} \in W$.

例：ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に対して $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, (原点を通る）超平面など.

2.3 ベクトルの線形独立性と線形従属性

定義２．５： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が 線形従属（もしくは一次従属）であるとは少なくとも１つ要素が 0 でない $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ が存在し，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ が成立することをいう．

定義２．６： $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ が 線形独立（もしくは一次独立）であるとは $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ を満たす $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ がすべて 0 であることをいう．

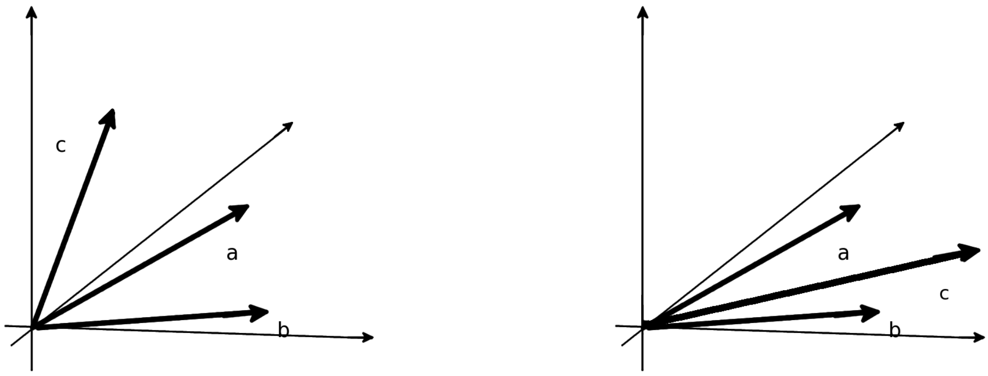

図 4: 3 次元空間における線形独立なベクトル（左）と線形従属なベクトル（右）．

[問題 02-01] 以下の命題を証明せよ．

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n \text{ が線形従属である}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \text{ の少なくとも１つが残りの } m-1 \text{ 個のベクトルの線形結合として表される．}$$

2.4 ノルム

一般的にノルムの定義は次のようになる．

定義２．７： 実数ベクトル空間 V において，実関数 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ が定められていて次の性質を満たす時，この関数を ノルム と呼ぶ．

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,

(i) $\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$

(ii) $\|\boldsymbol{a}\| = 0$ である必要十分条件は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(ii) $\|\alpha \boldsymbol{a}\| = |\alpha| \|\boldsymbol{a}\|$

(iv) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$.

[問題 02-02] $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ とする．

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立であることの定義を述べよ．

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が条件

$$\|\boldsymbol{a}_i\| \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \text{ および } (\boldsymbol{a}_i)^T \boldsymbol{a}_j = 0 \ (i \neq j)$$

を満たせば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ は線形独立であることを，(i) の線形独立の定義に基づいて示せ．

2.4.1 ベクトルノルム

一般的に，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき，このベクトルに対するノルムを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}$ 以外にも定義することができる．それらの代表的なものに次のものがある．

$$
\begin{array}{llll}
\|\boldsymbol{x}\|_1 & := & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|, & \text{（1-ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_2 & := & \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}}, & \text{（Euclid ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_\infty & := & \displaystyle\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|, & \text{（無限大ノルム）} \\
\|\boldsymbol{x}\|_p & := & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leq p < \infty). & \text{（p-ノルム）}
\end{array}
$$

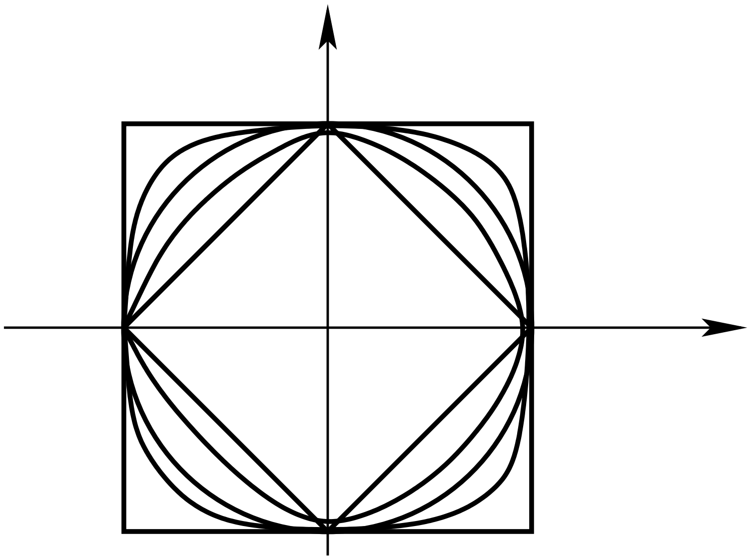

図 5: $\|\boldsymbol{x}\|_p = 1$ となるベクトル（点）を表した図（$1 \leq p \leq \infty$）．

2.4.2 行列ノルム

同様に $m \times n$ 次元実行列 $\boldsymbol{A}$ に対してもノルムを定義できる．

$$\|\boldsymbol{A}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \le p < \infty) \quad \text{（Hölder ノルム）}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_F := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{（Frobenius もしくは Hilbert-Schmidt ノルム）}$$

2.4.3 誘導された（行列）ノルム

$\mathbb{R}^m$ と $\mathbb{R}^n$ におけるノルムを選択することによって，$m \times n$ 次元実行列 $\boldsymbol{A}$ に対してもノルムを定義できる．

$$\|\boldsymbol{A}\|_{(m,n)} := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}}{\|\boldsymbol{x}\|_{(n)}} = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ \|\boldsymbol{x}\|_{(n)}=1} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_{(m)}.$$

この場合，次のような 誘導されたノルム が定義できる．

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 := \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|, \quad \text{（1-ノルム）}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 := \sigma_{\max}(\boldsymbol{A}), \quad \text{（スペクトルノルム）}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty := \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \quad \text{（無限大ノルム）}$$

ただし，$\sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ は行列 $\boldsymbol{A}$ の最大特異値を表す．$\boldsymbol{A}$ が正方の場合，$\sigma_{\max}(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ の最大固有値の平方根を表す．

例：
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{A}\|_F = 3$，$\|\boldsymbol{A}\|_1 = 4$，$\|\boldsymbol{A}\|_2 \approx 2.9208$，$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = 3$.

2.5 内積

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ の 内積 は

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

として定義される．

一般的にあるベクトル空間 V において定義される内積は次のようになっている．