

## 集合と位相 第二 授業補足

p. 162 下から 4-3 行目

距離空間において定義 2.47 (p. 145) と定義 2.52 (p. 162) は一致する.

説明) 距離空間において, 点  $x$  を中心とする開球体の全体が  $x$  の基本近傍系になっていることから明らかだが, 詳しく説明すると以下ようになる.

(定義 2.47  $\Rightarrow$  定義 2.52)  $U$ : nbhd of  $x$  とすると,  $\exists \varepsilon > 0$  s.t.  $U(x, \varepsilon) \subset U$ .  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$  より,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ;  $d(x, x_n) < \varepsilon$  なので,  $x_n \in U(x, \varepsilon) \subset U$ .

(定義 2.52  $\Rightarrow$  定義 2.47)  $U(x, \varepsilon)$  は  $x$  の nbhd なので,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ;  $x_n \in U(x, \varepsilon)$ , すなわち,  $d(x, x_n) < \varepsilon$ . これは  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$  を意味する.

p. 162 下から 3-2 行目

Hausdorff sp. において, 収束点列の極限は一意.

証明) 背理法による.  $X$ : Hausdorff sp. とし,  $\{x_n\} \subset X$ ,  $x_n \rightarrow x \in X$ ,  $x_n \rightarrow y \in X$ ,  $x \neq y$  とする.  $X$ : Hausdorff なので,  $\exists U, V \subset X$  s.t.  $U$ : open nbhd of  $x$ ,  $V$ : open nbhd of  $y$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .  $x_n \rightarrow x$  より,  $\exists N_x \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N_x$ ;  $x_n \in U$ .  $x_n \rightarrow y$  より,  $\exists N_y \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N_y$ ;  $x_n \in V$ .  $N \triangleq \max\{N_x, N_y\}$  とすると,  $x_N \in U$  かつ  $x_N \in V$  となり,  $U \cap V = \emptyset$  に反する.

p. 163 定理 2.50 の証明

「このとき,  $X$  の部分集合族  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は有限交叉性をもつ。」

説明)  $S_{n_1}, \dots, S_{n_k} \in \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  に対して,  $\bigcap_{i=1}^k S_{n_i} = S_n \neq \emptyset$  (ただし,  $n \triangleq \max\{n_1, \dots, n_k\}$ ).

p. 163 定理 2.50 の証明

「このとき, 任意の  $n$  に対して

$$d(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$$

となるような  $k_n$  を選ぶことができる. さらに,  $k_1 < k_2 < \dots$  となるようにできる。」

説明)  $x \in \overline{S_1}$  より  $d(x, x_{k_1}) < 1$  なる  $x_{k_1} \in S_1$  が存在する.  $x \in \overline{S_{k_1+1}}$  より  $d(x, x_{k_2}) < \frac{1}{2}$  なる  $x_{k_2} \in S_{k_1+1}$  が存在する.  $x \in \overline{S_{k_2+1}}$  より  $d(x, x_{k_3}) < \frac{1}{3}$  なる  $x_{k_3} \in S_{k_2+1}$  が存在する. 以下同様.

p. 164 定理 2.50 の証明

「 $X$  は点列コンパクトであるから,  $\{x_n\}$  は収束部分列  $\{x_{k_n}\}$  をもつ.  $\{x_{k_n}\}$  の極限を  $x$  とすれば」の続き部分の別証明

$U' = \{U_1, U_2, \dots\}$  が  $X$  の被覆であることから, ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $x \in U_n$  となる.  $U_n$ : open と  $x_{k_n} \rightarrow x$  より,  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall m \geq N$ ;  $x_{k_m} \in U_n$ . このとき,  $k_m \geq \max\{k_N, n\}$  なる  $k_m$  が存在し,

$$x_{k_m} \in F_{k_m} = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n \cup \dots \cup U_{k_m})$$

なので,  $x_{k_m} \in U_n$  に矛盾する. □

p. 164 定理 2.49 の証明

「定理 2.50 により  $X$  は点列コンパクトであるから,  $X$  の任意の Cauchy 列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は収束部分列をもつ. このとき, Cauchy 列の定義から  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  自身が収束する。」

次の補題から従う.

**補題** Cauchy 列の部分列が収束すれば, Cauchy 列自身も収束する.

証明)  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を Cauchy 列とし,  $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を収束部分列とする.  $\{x_{k_n}\}$  の極限点を  $x$  とする. 任意に  $\varepsilon > 0$  を固定する.  $x_{k_n} \rightarrow x$  より,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N_1$ ;  $d(x, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}$  である.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ : Cauchy 列ゆえ  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall m, n \geq N_2$ ;  $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$  である. ここで,  $N \triangleq \max\{k_{N_1}, N_2\}$  とおけば,  $\forall n \geq N$  に対して

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{k_{N_1}}) + d(x_{k_{N_1}}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

したがって,  $x_n \rightarrow x$ .

p. 165 定理 2.49 の証明

「このことから  $\{y_n\}$  が Cauchy 列になることがわかる。」

説明) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $N \geq \frac{2}{\varepsilon}$  なる  $N \in \mathbb{N}$  を取れば,  $\forall m, n \geq N$  について,  $y_m, y_n$  はある  $\frac{1}{N}$ -開球体に属するので,

$$d(y_m, y_n) < 2 \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$