

第 4 回 破壊靱性

無機材料工学科
准教授 安田公一

1. 理論強度（破壊応力の理論値）

固体の破壊応力の理論値 σ_{th} （理論強度）を求める。図 1 のような原子間ポテンシャルを仮定すると、外力が作用しない時の原子の平衡位置は a_0 となる。外力が作用して原子間距離が a になった時の応力 σ は、図 1 の形状から次式で近似することができる。

$$\sigma = \sigma_{th} \sin \frac{\pi}{2r_0} (a - a_0) \quad (1)$$

このようにすると、原子間距離が臨界距離 $a_0 + r_0$ の時に破壊応力の理論値 σ_{th} に達することになる。 $d\sigma = E d\varepsilon = E \frac{da}{a_0}$ の関係を用いると、ヤング率 E は次式となる。

$$E = a_0 \frac{d\sigma}{da} = \pi a_0 \frac{\sigma_{th}}{2r_0} \cos \frac{\pi}{2r_0} (a - a_0) \quad (2)$$

平衡位置近傍での微小変形を想定すれば、 $\cos$ 項はほぼ 1 に等しいので、破壊応力の理論値 σ_{th} は次式で与えられる。

$$\sigma_{th} = \frac{2Er_0}{\pi a_0} \quad (3)$$

実験的に求めた r_0/a_0 の比は 0.14 程度の値なので、破壊応力の理論値 σ_{th} は、ヤング率 E の約 10 分の 1 となる。例えば、典型的なセラミックスである多結晶アルミナのヤング率は約 400 GPa なので、多結晶アルミナの破壊応力の理論値は約 40 GPa となる。しかし、実在する多結晶アルミナの破壊応力は 400 MPa (= 0.4 GPa) 程度である。これは、破壊応力の理論値の約 100 分の 1 となっている。

2. 応力拡大係数の定義

破壊応力の理論値と実測値の違いは、図 2 に示すように、材料中にき裂状欠陥（Griffith き裂）が存在することで説明できる。すなわち、き裂状欠陥により応力

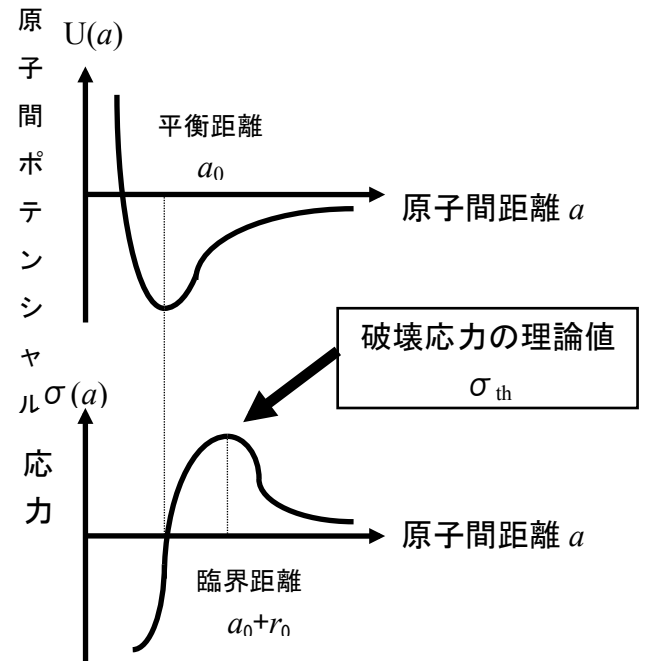


図 1 原子間ポテンシャルと破壊応力の理論値

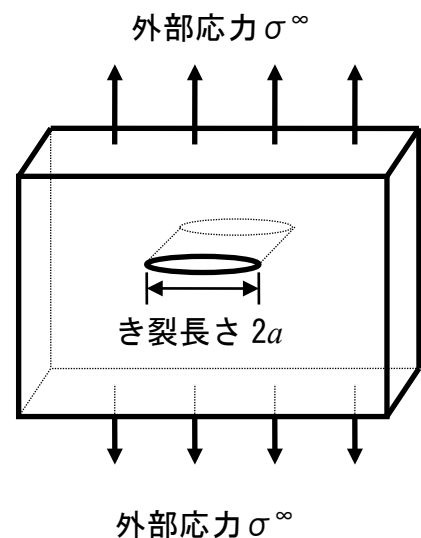


図 2 材料中のき裂状欠陥（モード I：開口型）

集中が起こり，外部応力 σ^∞ よりもはるかに高い局所応力 $\sigma_{ij}(r, \theta)$ がき裂先端に発生しているのである。この局所応力が破壊応力の理論値に達すると，き裂が巨視的に進展するため，実在するセラミックスの破壊応力は，見かけ上，破壊応力の理論値よりも低い値となると考えれば良い。

この主き裂先端近傍の局所応力場 $\sigma_{ij}(r, \theta)$ と局所変位場 (u, v, w) は，弾性力学によって既に解かれていて，図3のような2次元貫通き裂（主き裂長さ $2a$ ）の局所応力場を極座標系 (r, θ) で表すと，モードI（無限遠で σ_{yy} が σ^∞ で与えられる）の場合は，次式で近似される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで， G は剛性率， ν はポアソン比であり， κ は次式で定義される。

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{for plain strain}) \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & (\text{for plain stress}) \end{cases} \quad (11)$$

ここで，モードIは開口型，モードIIは面内せん断型，モードIIIは面外せん断型の変形様式を表し，その違いを図4に示す。なお，変形モードが3つあるというのは，そもそも，変形が x 方向， y 方向， z 方向の3つの変位成分 u, v, w だけで規定されているからである。なお，これらの式は，前期の連続体力学における2次元弾性論で説明した応力関数を用いれば，導出できるが，紙数の都合で，ここでは省略する。

以上の式を整理すると，局所応力場については，次のように一般的に表すことができる。

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} f^I_{ij}(\theta) \quad (12)$$

ここで， σ^∞ は外部応力， a は主き裂の半長， $f^I_{ij}(\theta)$ は θ のみの関数である。そこで，(12)式について吟味してみることにする。

まず，外部応力 σ^∞ あるいは主き裂長さの半長 a が大きくなればなるほど，局所応

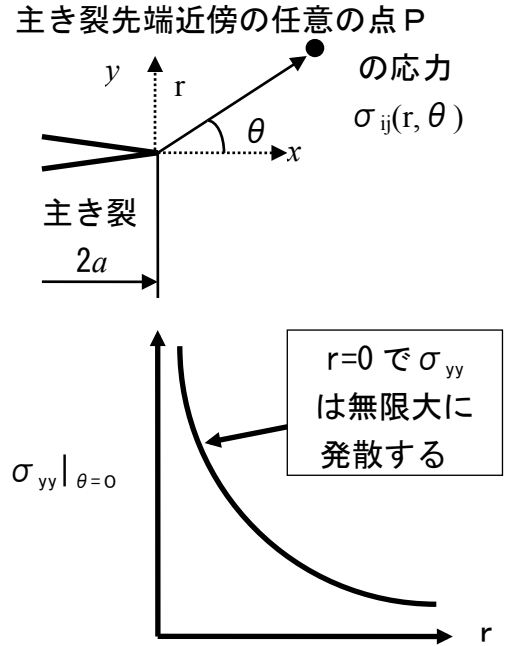


図3 主き裂先端近傍の応力集中

力 $\sigma_{ij}(r, \theta)$ も増加することがわかる。また、主き裂の先端に近づけば近づくほど、局所応力 $\sigma_{ij}(r, \theta)$ が増加し、主き裂先端では無限大に発散することがわかる。このように、(12)式はき裂状欠陥による応力集中の物理的状況を表していることがわかる。

それでは、この応力集中の程度を表すのに、どのようなパラメーターを使えば良いかを考えなければならない。一番素朴な考え方は、主き裂先端の応力の大きさをパラメーターにすることであるが、外部応力 σ^∞ が作用すればどのような場合でも、主き裂先端の応力は無限大に発散するので、これをパラメーターにすることはできない。では、極座標の r と θ に適当な値を入れて、その場所での応力の大きさを求めれば有限の値として比較できるが、特定の場所の指定の仕方は、特に根拠がある訳ではない。

そこで、(12) 式を良く見てみると、 $\sqrt{2\pi r}$ や $f_{ij}^I(\theta)$ は極座標に関連した変数なので、それ以外の $\sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ で局所応力場の強弱を比較すれば良いことに気付く。これを、新たに応力拡大係数 K_I (ケー・ワンと読む) と定義する。

$$K_I \equiv \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (13)$$

ここで注意しなければならないのは、応力拡大係数 K_I は外部応力 σ^∞ と主き裂の半長 a の両方の値で決まると言うことである。すなわち、外部応力 σ^∞ と主き裂の半長 a の組み合わせとして、(10MPa, 1m) とした場合でも、(1MPa, 100m) とした場合でも、応力拡大係数 K_I は同じ $10\sqrt{\pi} \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ という値になり、応力集中の程度も同じになる。表 1 には、いろいろな configuration の亀裂における応力拡大係数 K_I の算出式を示した。

3. 臨界応力拡大係数（破壊靱性）による破壊の表現

この応力拡大係数 K_I を用いて、脆性破壊を表現すると次のようになる。まず、ある部材に半長が a の主き裂が存在すると仮定する。この部材に外部応力 σ^∞ を負荷し、その値を徐々に増加して行く。これに伴って (13) 式で定義された応力拡大係数 K_I も増加して行くことになる。そして、この応力拡大係数 K_I が材料固有のある値に達した時に、主き裂が巨視的に進展して脆性破壊が起こったと考える。この材料固有の値を K_{IC} (ケー・ワン・シーと読む) と表記して、臨界応力拡大係数と定義する。すなわち、次式となる。

$$K_{IC} = \sigma_f^\infty \sqrt{\pi a} \quad (14)$$

ここで σ_f^∞ は破壊応力である。この式より、臨界応力拡大係数 K_{IC} と主き裂の半長 a が既知であるならば、その部材の破壊応力 σ_f^∞ が推定できることになる。また同様に、臨界応力拡大係数 K_{IC} と破壊応力 σ_f^∞ が既知であるならば、その部材の最弱欠陥の大きさ a を推定することができる。表 2 には代表的な材料の臨界応力拡大係数 K_{IC} を示した。また、臨界応力拡大係数 K_{IC} のことを破壊靱性と略称する場合が多い。

なお、モード II やモード III についても、同様の議論が成り立ち、 K_{II} 、 K_{III} や K_{IIC} 、 K_{IIIC} などが定義される。しかし、モード II やモード III に対する実験や解析はそれほど進んでいないのが、現状である。

表 2 代表的な材料の K_{IC}

材料	$K_{IC}/\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$
Si_3N_4	5-8
Al_2O_3	4
SiC	3-4
ガラス	0.5-1
C/C composites	8-10
鋳鉄	20
アルミニウム合金	30-50
鉄鋼	100

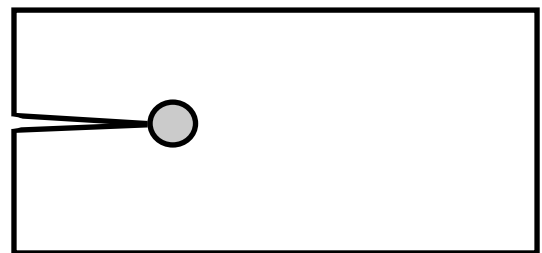
4. 小規模降伏条件

これで破壊靱性の定義についての説明は終わりにしたいのであるが、これまでの議論でひとつ曖昧にしてきた部分があるので、それについて補足したい。それは、応力拡大係数の定義のところで『主き裂先端近傍の局所応力は主き裂先端で無限大に発散する』と述べたことである。もし、これが現実には起こっているのならば、どのようなセラミックスも無限小の外部応力を負荷しただけで破壊することになる。

実際にこうならないのは、図5(a)に示すように、き裂先端にはフロントル・プロセスゾーンという微視的破壊領域が既に形成されており、無限大に発散する応力集中を緩和しているからである。しかし、通常のセラミックスにおいては、このフロントル・プロセスゾーンの大きさはき裂長さや部材の代表寸法に対して十分小さく、全系の力学的ポテンシャルエネルギー変化に対しては、フロントル・プロセスゾーン以外の弾性変形領域が支配的であると考えられている。このような場合には前述の議論は正しいと考えられ、金属の言葉を借りるならば『小規模降伏条件が成立している』と言う。

これに対して、図5(b)に示したように、フロントル・プロセスゾーンが形成された後で主き裂が進展し、主き裂の後方に残留してできるプロセスゾーン・ウェイクは、その影響が大きいと考えられている。すなわち、microcrack toughening や transformation toughening などの zone shielding 機構、あるいは bridging や pullout などの contact shielding 機構などの複雑な強化メカニズムが関与して、き裂長さと共に破壊靱性パラメーターが変化することが起こる。これをRカーブ(き裂進展抵抗曲線)挙動と呼ぶ。

(a) フロントル・プロセスゾーン



(b) プロセスゾーン・ウェイク

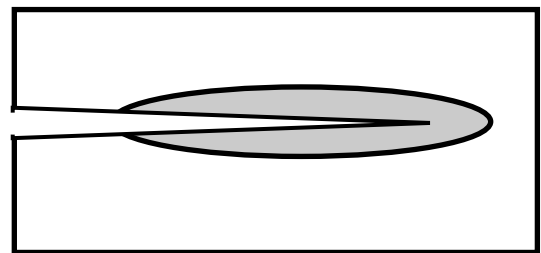


図5 プロセスゾーンの概念図