マクロ経済学第二 (工学院経営工学系，開講クォーター: 4Q)

第 11 回：経済成長 (1)：ソロー・モデル

大土井 涼二

2017 年 1 月 20 日

講義計画

- 1 月 20 日 (本日)：ソロー・モデル
- 1 月 24 日 (火)：技術進歩を導入したソロー・モデル
- 1 月 27 日 (金)：経済成長に関する実証研究
- 1 月 31 日 (火)：予備日

経済成長とは何か？

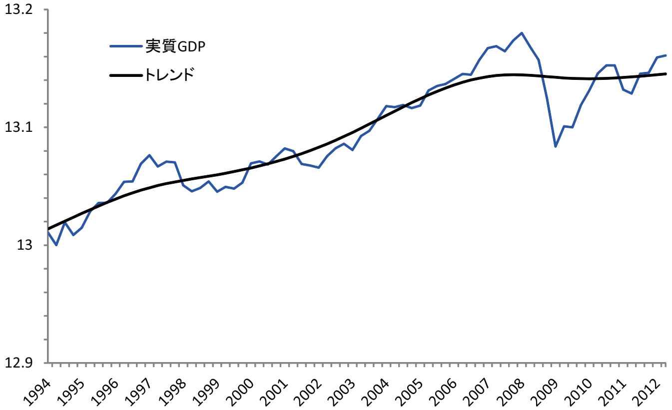
- 経済成長とは何か？
  $\Downarrow$
  一言でいえば「経済全体の生産 (所得) が長期的に拡大していくこと」

- 前回までに学んだ用語を使って表現すると..

経済成長

前回出した図における “トレンド”

(∗) 原系列，トレンド共に自然対数値



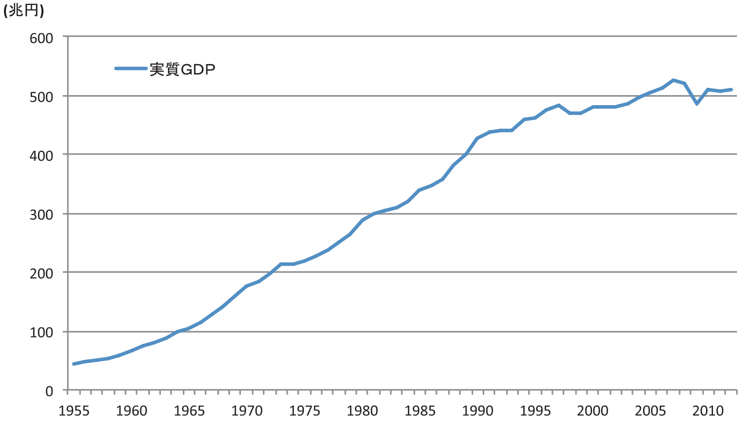
(出所) 内閣府「国民経済計算」

景気循環と経済成長

- **トレンドからの乖離 ··· 景気循環**
  $\Rightarrow$ **「IS–LM モデル」や「AS–AD モデル」で分析**

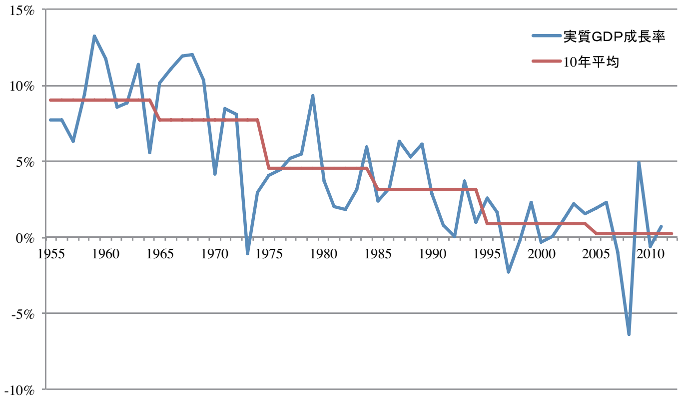
- **トレンドがどう決まるのか？··· 経済成長**
  - **「生産要素 (資本や労働) が時間を通じてどう変化していくのか？」を数理モデルに明示的に導入しなくてはならない．**
    $\Rightarrow$ **必然的に，時間の概念をモデルに組み込む必要がある．**
  - **「長期のマクロ経済均衡」(マクロ第一) のような「2 期間」では不十分**
    $\Rightarrow$ **より長い期間のモデルを構築する必要がある．**

より長期の傾向 (1955–2012)



(出所) 内閣府「国民経済計算」

実質 GDP 成長率


15%
10%
5%
0%
-5%
-10%
1955
1960
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
2010
実質GDP成長率
10年平均

経済成長理論とは？

- **経済成長理論の主要目的：**
  1. **一国の経済成長パターン決定要因の理論的解明**
  2. **国際的な所得格差の発生・持続メカニズムの理論的解明**

- **今日学ぶモデル：ソロー・モデル** (Solow model)
  - **ソロー・モデルとは？**
    1. **貯蓄 (=投資)，**
    2. **人口成長，**
    3. **技術進歩**

    が時間を通じて経済の GDP レベルにどのような影響を示すのかを分析する最もシンプルなモデル

  - **さらに，今回は「技術進歩」は省略し，前半２つの役割を分析する．**

モデルの設定

- **主要な変数の意味**
  1. t：**期間** (period), $t = 0, 1, 2, \ldots$
  2. Y_t： t **期の実質** GDP (**実質国内総所得**)
  3. K_t：**資本ストック**
  4. L_t：**労働力人口**
  5. C_t：**消費**
  6. S_t：**貯蓄**
  7. I_t：**投資**

モデルの特徴

- 無限期間モデルである．
  $\Leftrightarrow$ 終了期間をあえて明示していない

  理由：経済変数の長期にわたる推移を分析するため.

- 資本ストック，労働力ともに時間を通じて変化
  (cf)
  - マクロ第一で学んだ「長期の分析」
    ••• 労働は明示的に考察せず
  - AS–AD モデル
    ••• 資本ストックは明示的に考察せず

生産関数

- 生産要素として,「資本ストック」と「労働」を考える．
- t 期の生産は，以下の生産関数で記述される：

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

- 仮定：生産関数 F は K, L に関して**一次同次** (homogenous of degree one)：

$$\forall \lambda \geq 0,\ F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L).$$

$(*)$ 「規模に関して収穫一定 (constant returns to scale)」ともいう．

一次同次を満たす生産関数の例

- **コブ・ダグラス型関数：**

$$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- **線形関数：**

$$F(K_t, L_t) = B_K K_t + B_L L_t, \quad B_K > 0,\ B_L > 0.$$

- CES **型関数：**

$$F(K_t, L_t) = \left[B_K K_t^{\phi} + B_L L_t^{\phi} \right]^{1/\phi}, \ -\infty < \phi \leq 1.$$

資本蓄積式

- t 期の資本ストックを所与として，資本蓄積は以下の式に従う：

$$\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\text{資本の純増/純減}} = \underbrace{I_t}_{\text{実物投資}} - \underbrace{\delta K_t}_{\text{資本減耗}}$$

  ここで，$\delta \in [0, 1]$ は資本減耗率．

- 上記の式はテキスト第３章で既に登場済み (マクロ第一でカバー)

家計の行動

- **ソロー・モデルの仮定：**
  1. **家計は現在の可処分所得の一定割合を貯蓄**
  2. **租税はなし**

- **従って，経済全体の貯蓄 S_t は，GDP の一定割合となる．**

$$S_t = sY_t, \quad 0 < s < 1,$$

ここで，$s \in (0, 1)$ は貯蓄率．

資金市場の均衡と人口成長

- 閉鎖経済を考える．
- 資金市場の均衡条件：
$$S_t = I_t.$$
- また，労働力人口は一定の n の率で成長すると仮定する．
$$L_{t+1} = (1+n)L_t.$$

資本ストックの動学

- **これから行う分析：**

これまで登場した方程式を満たしつつ，資本ストックは時間を通じてどのように蓄積されていくのか？

$(\because)$ K_t **の動きと** L_t **の動きがわかれば，**GDP **の時間的変化も把握できる**

- **資本蓄積式は，以下のように表現することができる．**

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ &= S_t + (1-\delta)K_t \quad (\because \textbf{資金市場均衡}) \\ &= sF(K_t, L_t) + (1-\delta)K_t. \quad (\because \textbf{貯蓄率一定の仮定}) \end{aligned}$$

この経済の動学

- **従って，**

$$\textbf{資本ストックの動学式：} K_{t+1} = sF(K_t, L_t) + (1-\delta)K_t,$$
$$\textbf{労働力の動学式：} L_{t+1} = (1+n)L_t.$$

$\Rightarrow K_t$ **と** L_t **が決まれば，上記の 2 本の式から** K_{t+1} **と** L_{t+1} **が決定される！**

$\Rightarrow Y_t$ **の動きも決定される！**

- **しかし，生産関数** F **の性質を利用すれば，もっと簡単にこの経済の動学を記述できる．**

一人当たり GDP と一人当たり資本の関係

- **一人当たりの GDP を y_t，同資本ストックを k_t とする：つまり，**

$$y_t \equiv Y_t/L_t, \quad k_t \equiv K_t/L_t.$$

- **生産関数 F が一次同次を満たすことから，**

$$\begin{aligned} Y_t = F(K_t, L_t) \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{L_t} F(K_t, L_t) \\ \Leftrightarrow y_t &= F(k_t, 1). \end{aligned}$$

以降，関数 $F(k_t, 1)$ を新たに $f(k_t)$ と表記．

一人当たり資本 k_t の動学

- 資本の動学式と労働の動学式について，辺辺を割ると

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{sF(K_t, L_t) + (1-\delta)K_t}{(1+n)L_t}.$$

- これを整理すると

$$k_{t+1} = \frac{sf(k_t) + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

この式には，一人当たり資本に関する

1. 今期の変数 k_t
2. 来期の変数 k_{t+1}

だけが変数として含まれている．

(∗) このような方程式を，数学的には差分方程式という．

一人当たり資本 k_t の動学

- 通常，初期時点の一人あたり資本 k_0 は歴史的に決定済みであると仮定される．

$\Downarrow$

- k_0 を所与として，上記の差分方程式から任意の期の k_t の値を得ることができる．

- k_t の動きを把握する方法：
  1. 関数を特定化 & 仮定をおいて，$\{k_t\}$ を具体的に求める．
     $\Rightarrow$ 課題で考えてもらう．
  2. 図解

k_t の時間を通じた変化

- k_t の動学より，以下の関係を得る：

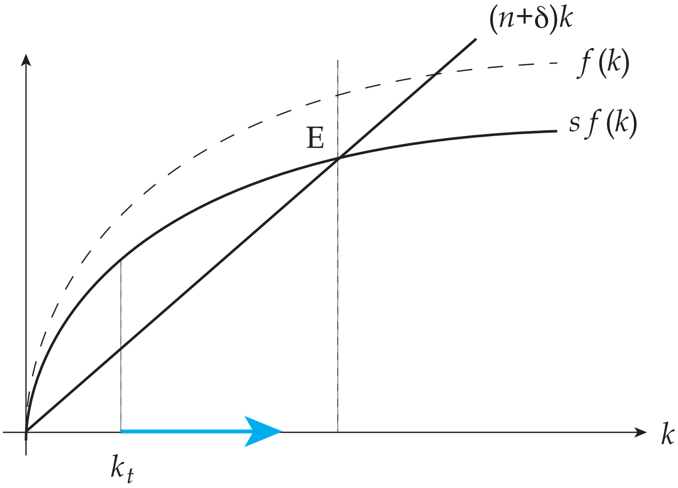
$$k_{t+1} = \frac{sf(k_t) + (1-\delta)k_t}{1+n} \Leftrightarrow \boxed{}$$

- したがって，

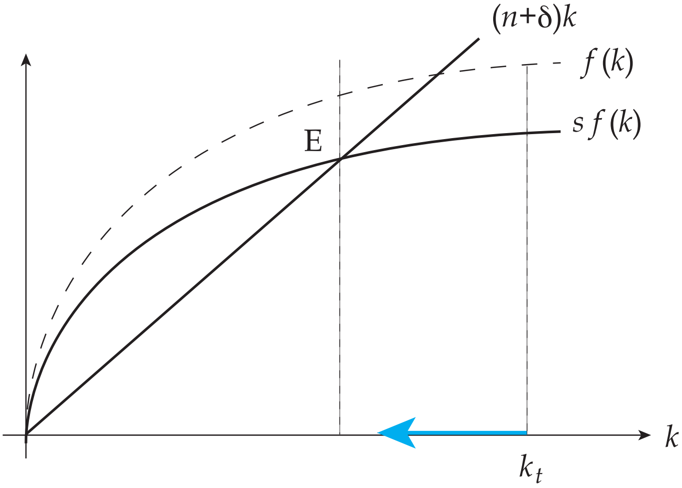
$$k_{t+1} \gtreqless k_t \Leftrightarrow \boxed{}$$

この関係式が，一人当たり資本が時間を通じて増加するのか，減少するのか，それとも同じ値で維持されるのかを決める．

図解：ケース 1



図解：ケース2



定常状態

- 交点 E における一人当たり資本の値を k^* としよう．つまり，k^* は

$$\boxed{\phantom{k_{t+1} = k_t = k^*}}$$

　で定義される．

- すでに明らかになったように，$k_t = k^*$ のとき，

$$k_{t+1} = k_t = k^*.$$

　$\Downarrow$
　$y_t = f(k_t)$ より，このとき一人当たり GDP も時間を通じて一定

- このように，時間 t に依存せず経済変数が一定の値を維持する状態を**定常状態** (steady state) という．

　(∗) 便宜上，一定の値そのもの (たとえば，k^*) を定常状態と呼ぶこともある．

定常状態の具体的な値

- **一人当たり生産関数 f を特定化すれば，k^* を具体的に求めることができる．**
- **(例)** $f(k) = k^\alpha$ **のとき，定常状態** k^* **は**

$$k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} .$$

この k^* **に対応する** y^*, c^* **の値は指定テキスト p.194 を参照．**

比較静学：人口成長率が上昇したとき

板書

比較静学：貯蓄率が上昇したとき

板書

資本の黄金律

課題で考えてもらう．

GDP 成長率

- 疑問：モデルから得られた GDP の動きは，現実に観察される動きと整合的であろうか？

  $\Rightarrow$ ここでは,「GDP 成長 "率" が経済成長とともに傾向的に低くなっていく」という事実が理論的に説明できるか否かに分析の焦点を絞る.

  $(*)$ 対象を「一人当たり GDP 成長率」にしても同様の分析が可能.

- この経済の実質 GDP$= Y_t$:

$$Y_t = L_t y_t \equiv L_t f(k_t).$$
$$\Leftrightarrow \ln Y_t = \ln L_t + \ln f(k_t).$$

- 階差をとると

$$\ln Y_{t+1} - \ln Y_t = \ln L_{t+1} - \ln L_t + \ln f(k_{t+1}) - \ln f(k_t)$$

GDP 成長率

- 以上より，実質 GDP の成長率は近似的に

$$\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}=n+\frac{f'(k_t)k_t}{f(k_t)}\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}$$

で表される (解説は板書).

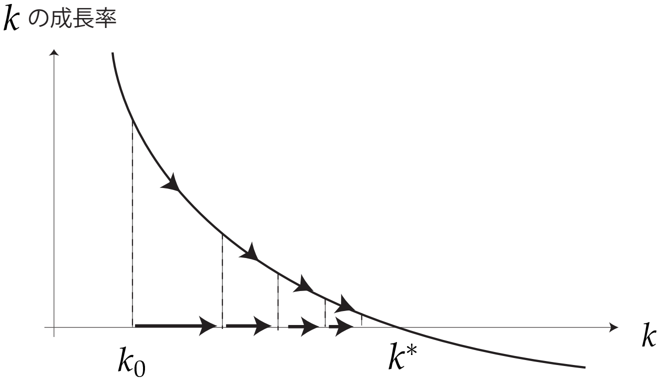
$\Rightarrow$ GDP 成長率の動きは，一人当たり資本の蓄積パターンに依存.

- k_t の成長率：

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}=\frac{sf(k_t)/k_t-(n+\delta)}{1+n}$$

k_t の成長率

- k_t の増加に伴い，その成長率は下落していくことを示すことができる (板書)



⇒ 従って，GDP 成長率も経済成長とともに下落していく.
⇒ 現実と整合的！

付随して得られる 2 つの含意

- 理論的帰結：経済規模が大きくなればなるほど，成長率は低くなる．
- 長期の経済における 2 つの重要な含意：
  1. (時系列的) 一国の経済成長率 (厳密にはトレンドの成長率) は，時間の経過とともに下降する．
     (※) 他の経済ショックに起因する短期的な成長率の上昇はあり得る．
  2. (横断面的) 貧しい国と富んでいる国とでは，あくまで成長率でみれば貧しい国のほうが高い．
     (※) 貧しい国はやがて富める国に追いつく？ $\Rightarrow$ この仮説を「収束仮説」という．
- ソロー・モデルが現実をどれだけ説明できるのか，を考察する際に，この 2 つの性質が現実に観察されるのか，を調べる際のポイントとなる．