三重積分と体積

ここでは $\mathbb{R}^3$ 内の可測な有界閉領域 $V\subset\mathbb{R}^3$ と V 上の連続関数 $f(\boldsymbol{x})=f(x,y,z)$ を考える. V は平面 $x=a,\ x=b$ の間にあるとし ($[a,b]=\{x\,|\,(x,y,z)\in V\}$), $x\in[a,b]$ に対する V の**切り口**を V_x とすると, 累次積分により

(1) $$\iiint_V f(\boldsymbol{x})dxdydz=\int_a^b\Big\{\iint_{V_x} f(\boldsymbol{x})dydz\Big\}dx,\quad V_x:=\{(y,z)\,|\,(x,y,z)\in V\}$$

また, V の xy 平面への正射影 $\tilde{V}:=\{(x,y)\,|\,(x,y,z)\in V$ となる z がある $\}$ 上の点 (x,y) に対し, $(x,y,z)\in V$ をみたす z の範囲が $h_1(x,y)\leqq z\leqq h_2(x,y)$ (h_1,h_2 は連続) と表されるとき,

(2) $$\iiint_V f(\boldsymbol{x})dxdydz=\iint_{\tilde{V}}\Big\{\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(\boldsymbol{x})dz\Big\}dxdy$$

特に, V が $V=\{(x,y,z)\,|\,a\leqq x\leqq b,\ g_1(x)\leqq y\leqq g_2(x),\ h_1(x,y)\leqq z\leqq h_2(x,y)\}$ (g_1,g_2,h_1,h_2 は連続) のとき,

(3) $$\iiint_V f(\boldsymbol{x})dxdydz=\int_a^b\Big\{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\Big(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(\boldsymbol{x})dz\Big)dy\Big\}dx=:\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}dy\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)}f(\boldsymbol{x})dz$$

V の体積 $|V|=v(V)$ は ($f=\chi_V$ として) $\iiint_V dxdydz$ で与えられたが, $S(x):=|V_x|$ が可積分のときは,

定理 5.4.1 平面 $x=a,x=b$ の間にある図形 V の切り口 V_x の面積が可積分関数 $S(x)=|V_x|$ で与えられるとき,

$$|V|=\int_a^b S(x)dx$$

(**カヴァリエリの原理** (Cavalieri's principle) : $x=a,x=b$ の間にある図形 V,V' の切り口の面積が等しければ ($|V_x|=|V'_x|=S(x)$), V と V' の形によらず体積は等しい.)

D が xy 平面上の有界閉集合とし, V が D 上の連続関数 h_1,h_2 により $V=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ h_1(x,y)\leqq z\leqq h_2(x,y)\}$ と表されるときは

(2') $$|V|=\iint_D\{h_2(x,y)-h_1(x,y)\}dxdy$$

例題 5.4.1' 楕円体 $V:x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqq 1$ $(a,b,c>0)$ の体積を求める.

解答例 (1) $(x,y,z)=(ar\sin\theta\cos\varphi,br\sin\theta\sin\varphi,cr\cos\theta)$, $E=\{(r,\theta,\varphi)\,|\,0\leqq r\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi\}$ と変数変換すると, $dxdydz=abcr^2\sin\theta drd\theta d\varphi$ より,

$$\iiint_V dxdydz=abc\iiint_E r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^1 r^2dr=2\pi abc\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1=\frac{4\pi}{3}abc$$

(2) 切り口 V_z : $y^2/b^2+z^2/c^2\leqq 1-x^2/a^2$ $(-a<x<a)$ は軸半径が $b\sqrt{1-x^2/a^2}$, $c\sqrt{1-x^2/a^2}$ の楕円なので, $S(z)=|V_z|=\pi(1-x^2/a^2)bc$. 5.4.1 より,

$$|V|=\pi bc\int_{-a}^{a}\Big(1-\frac{x^2}{a^2}\Big)dx=2\pi bc\Big[x-\frac{x^3}{3a^2}\Big]_0^a=\frac{4\pi}{3}abc.\quad\text{特に半径 } a \text{ の球体の体積は } \frac{4\pi}{3}a^3.$$

(注) 球体のとき, $S(x)=\pi(a^2-x^2)$ $(z\geqq 0)$ は半径 a の円柱から半径 a 高さ a の円錐を除いた図形の切り口の面積でもある. 錐体の体積は底面の形によらず底面積と高さが同じなら同体積 (=底面積×高さ/3) になる.

例題 5.4.2 半径 a (>0) の球体 : $|\boldsymbol{x}|\leqq a$ と円柱 : $x^2+y^2\leqq ax$ の共通部分の体積 $|V|$ を求める.

解答例 (円柱は $(x-a/2)^2+y^2\leqq(a/2)^2$, 即ち, $z=0$ で半径 a の円と y 軸に接する (図).) 図形の対称性より, $|V|$ は $y\geqq 0,\ z\geqq 0$ の部分 V' の体積の 4 倍. 円柱の底面の半分 $D'=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq ax,\ y\geqq 0\}$(図) 上で V' を (2') の形の図形と考えると $V'=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ 0\leqq z\leqq\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$ より $|V'|=\iint_{D'}\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$. D' を極座標表示すると $0\leqq r\leqq a\cos\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\pi/2$. $\sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy=\sqrt{a^2-r^2}\,rdrd\theta$.

$$|V|=4|V'|=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,rdr=4\int_0^{\pi/2}\Big[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\Big]_0^{a\cos\theta}d\theta=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\Big)a^3$$

例題 5.4.3 2 つの円柱 : $x^2+y^2\leqq a^2,\ y^2+z^2\leqq a^2$ の共通部分の体積 $|V|$ を求める.

解答例 $x,y,z\geqq 0$ の部分は, $D'=\{(x,y)\,|\,x,y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq a^2\}=\{(x,y)\,|\,0\leqq y\leqq a,\ 0\leqq x\leqq\sqrt{a^2-y^2}\}$ とするとき $V'=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D',\ 0\leqq z\leqq\sqrt{a^2-y^2}\}$ と表されるので $|V|=8|V'|$ より,

$$|V|=8|V'|=8\iint_{D'}\sqrt{a^2-y^2}dxdy=8\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}dx=8\int_0^a(a^2-y^2)dy=8\Big[a^2y-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^a=\frac{16}{3}a^3$$

例 半径 a (>0) の 4 次元球体 B^4 の測度 $|B^4|$ を求める. 切り口 B^4_x $(-a<x<a)$ は半径 $\sqrt{a^2-x^2}$ の球体なので, $|B^4_x|=4\pi(a^2-x^2)^{3/2}/3$. $x=a\sin\theta$ $(-\pi/2\leqq\theta\leqq\pi/2)$ と変換して $dx=a\cos\theta d\theta$ より

$$|B^4|=\frac{4\pi}{3}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{3/2}dx=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,a\cos\theta d\theta=\frac{8\pi a^4}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\frac{8\pi a^4}{3}\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}a^4$$

曲面積 曲面積の定義はいくつか知られているが, 曲線の長さの様に直感的に分かり易い定義ではない. しかし, C^1 級曲面 $S: z=f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ については比較的分かり易い次の様な定義がある：
D を有界閉領域とし, D を含む区間 I とその分割 $I_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ \Delta y_j=y_j-y_{j-1})$ をとり, $I_{ij}\subset D$ となるものを考える. 像 $f(I_{ij})$ の面積を, S 上の点 $(\boldsymbol{a}_{ij}, f(\boldsymbol{a}_{ij}))$ $(\boldsymbol{a}_{ij}\in I_{ij})$ における接平面 π の, I_{ij} に対応する部分の平行四辺形 π_{ij} ($=\pi$ と四角柱 $I_{ij}\times\mathbb{R}$ の共通部分) の面積で近似するとき, $|S|=\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta |\pi_{ij}|$ が収束するならば, 曲面 S は**面積確定**であるといい, $|S|$ を S の (曲) 面積という.
一般に, C^1 級曲面 $\boldsymbol{f}: D\to\mathbb{R}^3$ $(\operatorname{rank} J\boldsymbol{f}=2)$ 上の点 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ における接平面は, $\boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{a})s+\boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{a})t+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ $(s,t\in\mathbb{R})$ と表され, 2 辺が $(\Delta x,0),(0,\Delta y)$ の長方形は 2 辺が $\boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{a})\Delta x,\ \boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{a})\Delta y$ の平行四辺形にうつされる.
曲面 $S: z=f(x,y)$ については 写像 $\boldsymbol{f}(x,y)=(x,y,f(x,y))$ を考えて, $\boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{a})={}^t(1,0,f_x(\boldsymbol{a})),\ \boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{a})={}^t(0,1,f_y(\boldsymbol{a}))$ を用いて $(\boldsymbol{a},f(\boldsymbol{a}))$ における接平面が, $s=x-a=\Delta x,\ t=y-b=\Delta y\in\mathbb{R}$ として, $\boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{a})s+\boldsymbol{f}_y(\boldsymbol{a})t+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})={}^t(x,y,f_x(\boldsymbol{a})(x-a)+f_y(\boldsymbol{a})(y-b)+f(\boldsymbol{a}))$ と表される. π_{ij} は $\boldsymbol{v}_{ij}:={}^t(1,0,f_x(\boldsymbol{a}_{ij}))\Delta x_i,\ \boldsymbol{w}_{ij}:={}^t(0,1,f_y(\boldsymbol{a}_{ij}))\Delta y_j$ を 2 辺とする平行四辺形で面積は外積の長さに等しい (プリント：行列式と図形) ：
(一般に, $\boldsymbol{a}={}^t(a_1,a_2,a_3),\ \boldsymbol{b}={}^t(b_1,b_2,b_3)$ の外積の長さは $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$)

$$|\pi_{ij}|=|\boldsymbol{v}_{ij}\times\boldsymbol{w}_{ij}|=\sqrt{(f_x\Delta x_i\Delta y_j)^2+(f_y\Delta x_i\Delta y_j)^2+(\Delta x_i\Delta y_j)^2}=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta x_i\Delta y_j$$

($(\boldsymbol{a}_{ij})$ は略した.) $\therefore |S|=\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta|\pi_{ij}|=\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\Delta x_i\Delta y_j=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$ より,

定理 5.4.2 D が有界閉領域, $f(x,y)$ $((x,y)\in D)$ が C^1 級ならば, 曲面 $S: z=f(x,y)$ は面積確定で, 面積 $|S|$ は

$$|S|=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\ dxdy=\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy$$

D が平面極座標を用いて $\alpha\leqq\theta\leqq\beta,\ r_1(\theta)\leqq r\leqq r_2(\theta)$ と表されるときは $z_x^2+z_y^2=z_r^2+z_\theta^2/r^2$ より,

$$|S|=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\sqrt{1+z_r^2+\frac{1}{r^2}z_\theta^2}\ rdr$$

良く用いる曲面の表示 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})={}^t(x(\boldsymbol{u}),y(\boldsymbol{u}),z(\boldsymbol{u}))$ $(\boldsymbol{u}=(u,v)\in D)$ (C^1 級) については： ((,) を内積として)

$$|S|=\iint_D\sqrt{\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|^2+\left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|^2+\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|^2}\ dudv=\iint_D\sqrt{|\boldsymbol{f}_u|^2|\boldsymbol{f}_v|^2-(\boldsymbol{f}_u,\boldsymbol{f}_v)^2}\,dudv=\iint_D\sqrt{\det({}^tJ\boldsymbol{f}\ J\boldsymbol{f})}\,dudv$$

定理 5.4.3 C^1 級曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ を x 軸の周りに回転してできる曲面 S の面積 $|S|$ は

$$|S|=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

弧長 $s=s(x)=\int_a^x\sqrt{1+f'(t)^2}dt$ を変数 (全長を L) として $ds=\sqrt{1+f'(x)^2}dx$ により変換すれば $|S|=\displaystyle\int_0^L|y|ds$.

証明 $S: y^2+z^2=f(x)^2$ より, この式を x,y で偏微分して z_x, z_y を求める：$2zz_x=2f(x)f'(x),\ 2y+2zz_y=0$ より $z_x=f(x)f'(x)/z,\ z_y=-y/z$. $1+z_x^2+z_y^2=(f(x)^2f'(x)^2+y^2+z^2)/z^2=f(x)^2(1+f'(x)^2)/(f(x)^2-y^2)$. $\therefore$ $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}/\sqrt{f(x)^2-y^2}$. $D=\{(x,y)\,|\,a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y\leqq|f(x)|\}$ として,

$$|S|=4\int_a^b dx\int_0^{|f(x)|}\frac{|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2-y^2}}dy=4\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{|f(x)|}\right]_0^{|f(x)|}=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$

例題 5.4.4 半径 $a\ (>0)$ の球面： $|\boldsymbol{x}|=a$ が円柱：$x^2+y^2\leqq ax$ により切り取られる部分 S の面積を求める.

解答例 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq ax,\ y\geqq 0\}$ とおいて, D の上部にある S の部分 S' の面積を 4 倍すれば $|S|$ をえる. $x^2+y^2+z^2=a^2$ を偏微分して $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$ を求める：$2x+2zz_x=0,\ 2y+2zz_y=0$ より $z_x=-x/z,\ z_y=-y/z$. $\therefore \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=a/z$. D を極座標表示して $0\leqq r\leqq a\cos\theta,\ 0\leqq\theta\leqq\pi/2$, $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-r^2}$.

$$|S|=4\iint_D\frac{a}{z}dxdy=4a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=4a\int_0^{\pi/2}\Big[-\sqrt{a^2-r^2}\Big]_0^{a\cos\theta}d\theta=4a^2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)d\theta=2a^2(\pi-2)$$

重心 $\boldsymbol{x}_i=(x_i,y_i,z_i)$ の位置に質量 m_i の質点があるときの系の重心 G の位置は $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\sum_i m_i\boldsymbol{x}_i/M$ $(M=\sum_i m_i)$ で与えられたが, 物体 V の質量密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}\in V)$ が与えられたときの V の重心の位置は (極限移行して),

$$\frac{1}{M}\iiint_V\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}\quad\left(=\frac{1}{M}\Big(\int_V x\rho d\boldsymbol{x},\int_V y\rho d\boldsymbol{x},\int_V z\rho d\boldsymbol{x}\Big),\quad M=\iiint_V\rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\ \ d\boldsymbol{x}=dxdydz\right)$$

(M は V の全質量.) 図形の重心は, $\rho\equiv 1$ として $\iiint_V\boldsymbol{x}d\boldsymbol{x}/|V|$ で与えられる.
また, 面積確定な C^1 級曲面 $S: z=f(x,y)$ $(\boldsymbol{x}=(x,y)\in D)$ 上に面密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ が与えられたときの重心の位置は,

$$\frac{1}{M}\iint_D\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\boldsymbol{x}\qquad\left(M=\iiint_D\rho(\boldsymbol{x})\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}d\boldsymbol{x},\ \ d\boldsymbol{x}=dxdy\right)$$

補足

パップス・ギュルダン (Pappus-Guldinus) の定理

(1) xy 平面上の $y \geqq 0$ の部分にある滑らかな境界をもつ面積確定閉領域 D を x 軸の周りに回転させてできる回転体を V とし, D の重心と x 軸の距離を r とするとき,

$$|V| = 2\pi r|D|$$

(2) xy 平面上の $y > 0$ の部分にある, 閉区間上定義された C^1 級曲線 C (長さ $|C|$) を x 軸の周りに回転させてできる回転面を S とし, C の重心と x 軸の距離を r' とするとき, S の面積は

$$|S| = 2\pi r'|C|$$

$(\because)$ (1) $|V| = 2\pi \int_D y dxdy,\ \ r = \frac{1}{|D|}\int_D y dxdy$ より $|V| = 2\pi r|D|$.
(2) 曲線を $C : y = f(x)\ (a \leqq t \leqq b)$ とすると, $|C| = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)}dx,\quad |S| = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$, $r' = \frac{1}{|C|}\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$ より $|S| = 2\pi r'|C|$.

曲線 $C : \boldsymbol{f}(t) = (x(t), y(t))\ (a \leqq t \leqq b,\ \ \boldsymbol{f}' \neq \boldsymbol{0})$ については, $|C| = \int_a^b |\boldsymbol{f}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$,
$|S|$ は, $x'(t) \neq 0$ の部分 $(t_1 < t < t_2,\ x_1{=}x(t_1),\ x_2{=}x(t_2))$ では逆関数 $t = t(x)$ により y を x の関数と考えれば,
$|S| = 2\pi|\int_{x_1}^{x_2} |y|\sqrt{1{+}(dy/dx)^2}dx| = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'(t)^2{+}y'(t)^2}dt = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y|\boldsymbol{f}'(t)|dt$.
$x'(t) = 0$ の部分 $(t_1 \leqq t \leqq t_2,\ y_1{=}y(t_1),\ y_2{=}y(t_2))$ では $(y'(t) \neq 0$ で) 上式 $2\pi\int_{t_1}^{t_2} y|\boldsymbol{f}'(t)|dt$ は,
$= 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y|y'(t)|dt = 2\pi|\int_{t_1}^{t_2} yy'dt| = \pi|y_2^2{-}y_1^2|$ より C のこの部分が作る回転面の曲面積になる. 以上より,

$$|S| = 2\pi\int_a^b y(t)|\boldsymbol{f}'(t)|dt = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2{+}y'(t)^2}dt$$

が C の作る回転面の面積になる. また, $r' = \frac{1}{|C|}\int_{t_1}^{t_2} y(t)|\boldsymbol{f}'(t)|dt$ より $|S| = 2\pi r'|C|$.

オイラーのガンマ関数とベータ関数

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (s > 0), \qquad B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1{-}x)^{q-1}dx\ (p, q > 0)$$

これらの特殊関数は応用上重要であり, 積分の計算にしばしば用いられる. その性質は:

定理 5.5.1 (ガンマ関数) (2) $\Gamma(s{+}1) = s\Gamma(s)\ (s > 0)$. (3) $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(n) = (n{-}1)!\ (n \in \mathbb{N})$. (4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

定理 5.5.2 (ベータ関数) (2) $B(q,p) = B(p,q)$. (3) $B(p, q{+}1) = (q/p)B(p{+}1, q)$.
(4) $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$. (5) $\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\cos^b\theta d\theta = \frac{1}{2}B((a{+}1)/2, (b{+}1)/2)\ (a, b > -1)$.

定理 5.5.3 (両者の関係) $B(p,q) = (\Gamma(p)\Gamma(q))/\Gamma(p{+}q)$.

略証 5.5.1 (2): 部分積分. (3):(2) と $\Gamma(1) := \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$. 5.5.2(3) 部分積分. 他は変数変換:
(i) $\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2s-1}dt\ \ (x = t^2)$. $\therefore\ \Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ より 5.5.1 (4).
5.5.2: (2): $t = 1{-}x$. (4): $x = \sin^2\theta$. (5): (4) で $a = 2p{-}1,\ b = 2q{-}1$.
5.5.3: (i) で $\Gamma(p), \Gamma(q)$ の変数を x, y にすると $\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$. 極座標変換すると,
$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\ \sin^{2q-1}\theta\ d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-2}rdr = B(q,p)\cdot 2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr = B(p,q)\cdot\Gamma(p{+}q)$.

他の変数変換 (ii) $\int_0^1 t^{r-1}(1{-}t^a)^{q-1}dx\ (= B(p,q)/a) = B(r/a, q)/a\ \ (a > 0,\ x = t^a,\ r = ap)$.
(iii) $B(p,q) = \int_0^\infty t^{p-1}/(1{+}t)^{p+q}dt\ \ (x = t/(1{+}t),\ dx = dt/(t{+}1)^2)$. (iii) を $t = x^a\ (a > 0),\ r = ap,\ b = p{+}q$ として
(iv) $\int_0^\infty x^{r-1}/(1{+}x^a)^b dx\ (= B(p,q)/a) = B(r/a, b{-}r/a)/a$.

特殊値 $B(1,p) \underset{(2)}{=} B(p,1) := \int_0^1 x^{p-1}dx = 1/p$. $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \underset{(4)}{=} 2\int_0^{\pi/2}d\theta = \pi$. $\therefore \Gamma(\frac{1}{2})^2 = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\Gamma(1) = \pi$. $\therefore \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
$\Gamma(s) \underset{(2)}{=} (s{-}1)(s{-}2)\cdots r\Gamma(r)\ \ (s = r{+}n,\ 0{<}r{<}1,\ n{\in}\mathbb{N})$ 特に, $s = n{+}\frac{1}{2}$ のとき: $2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n}dt = \Gamma(n{+}\frac{1}{2})$
$= (2n{-}1)(2n{-}3)\cdots 1/2^n\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = (2n{-}1)!!\sqrt{\pi}/2^n$. ((i)) $(2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2n-1}dt = \Gamma(n) = (n{-}1)!.)$
$I_{m.n} := \int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta d\theta = \frac{1}{2}B((m{+}1)/2, (n{+}1)/2) = \frac{1}{2}\Gamma((m{+}1)/2)\Gamma((n{+}1)/2)/\Gamma((m{+}n)/2{+}1)\ (m, n{=}0, 1, 2\cdots)$.
$\therefore m, n$ 偶数: $I_{m.n} = (\pi/2)(m{-}1)!!(n{-}1)!!/(m{+}n)!!$, その他: $I_{m.n} = (m{-}1)!!(n{-}1)!!/(m{+}n)!!$.

定理 5.5.4 (1) $\Gamma(s)\Gamma(s{+}\frac{1}{2}) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(2s)$. (2) $\Gamma(s)\Gamma(1{-}s) = \pi/(\sin\pi s)$.
$(\because)$ (1) $B(\frac{1}{2}, s) = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1{-}x)^{s-1}dx$ を $x = t^2,\ t = 2u{-}1$ と変換して, $B(\frac{1}{2}, s) = \int_{-1}^1(1{-}t^2)^{s-1}dt = 2^{2s-1}\int_0^1 u^{s-1}(1{-}u)^{s-1}dx$.
$\therefore B(\frac{1}{2}, s) = 2^{2s-1}B(s,s)$, $\Leftrightarrow \Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2})/\Gamma(s{+}\frac{1}{2}) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s)/\Gamma(2s)$ より $\Gamma(s)\Gamma(s{+}\frac{1}{2}) = 2^{1-2s}\pi\Gamma(2s)$. (2) は略.

また, 半径 r の n 次元球体の体積 $V^n(r)$ が (帰納法により) 次式で与えられる: $V^n(r) = \pi^{n/2}r^n/\Gamma(n/2{+}1)$. $\therefore$
$V^{2m}(r) = \pi^m r^{2m}/m!\ (n{=}2m),\ \ V^{2m-1}(r) = 2^m\pi^{m-1}r^{2m-1}/(2m{-}1)!!\ (n{=}2m{-}1)$.