

行列式と図形

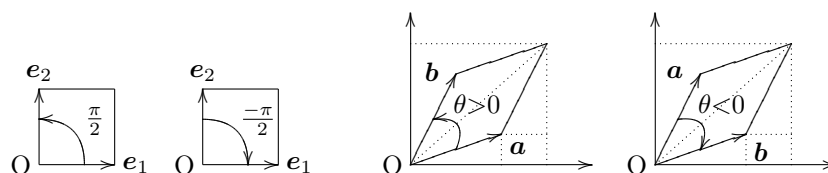
ここでは2次,3次の実行列と列ベクトルを考え,2次,3次の行列式の幾何学的意味を考察する.以下,列ベクトルは座標平面 $\mathbb{R}^2$ や座標空間 $\mathbb{R}^3$ 上の点(の座標),又は原点 O を始点とする有向線分とみなす.

2次の行列式 ベクトル $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ に対し,行列 $A = [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ の絶対値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に等しい. 証明は例えば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $\mathbf{a}$ の長さ(大きさ) $\sqrt{a^2 + c^2}$ を $\|\mathbf{a}\|$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の内積 $ab + cd$ を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と書くと, $S = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ ($\sin \theta \geq 0$) より

$$\begin{aligned} S^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \\ &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = (ad - bc)^2. \quad \therefore S = |ad - bc|. \end{aligned}$$

($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一直線上にあればこの平行四辺形はつぶれており面積は0と考える.)

従って2次の行列式の値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の**符号付き面積**を表している. 符号は, 座標軸方向の基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に対し $|\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2| = |E_2| = 1$, $|\mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_1| = -1$ であり, 一般には, 角 θ を $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲で考え, $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に向かって回るとき, 正回転 (= 反時計回り) なら θ には正の符号を, 負回転 (= 時計回り) なら θ には負の符号を付けると $\det [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ になる.



そこで, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を2辺とする平行四辺形には向きが付いていると考え, 行列式が正のときは表向きで面積も正, 負のときは裏向きで負の面積を持つ, と考える. このとき次がいえたことになる.

2次の行列式と符号付き面積

行列式 $|A| = \det[\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の符号付き面積に等しい.

一次変換と行列式 (関数と同じで) 一般に, 集合 X の各元 x に集合 Y の元 y を1つずつ対応させる規則 f を X から Y への**写像**といい, y を $f(x)$ や $y = f(x)$ などと表す. $f(x)$ を x の f による**像**という. また, X を f の**定義域**, Y を f の**値域**といい, 写像 f はこれらを明示して

$$f: X \rightarrow Y$$

と表す. $X=Y$ のときには f を**変換**ともいう. 平面上の点 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ に平面上の点 $A\mathbf{x}$ を対応させる写像 $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ は平面上の点の移動を表すと考えられる. この f を行列 A の定める**一次変換**, または**線型変換**といい, A を f の**表現行列**という. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, $P \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $Q \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $R \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $P' = f(P)$ 等とすると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= A\mathbf{x} = [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y \\ &= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}$ であり, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の作る単位正方形を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形に移す. その面積の比は(単位正方形の面積が1なので) $|\det A|$ に等しく, $\det A < 0$ のときは裏返る. このことは平面上のどんな図形に対しても成り立つ. 即ち

一次変換と行列式

行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値は行列 A の定める一次変換によって移る図形の符号付き面積の比(拡大率)を表す.

なお、 x 軸, y 軸, 原点に関する対称移動, 原点を中心とする角 θ の回転移動, 原点を中心とする相似比 k の相似変換は全て一次変換であり, それらの表現行列は次の通り: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

空間ベクトルの外積と行列式 空間の2つのベクトル $\mathbf{a} = {}^t[a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{b} = {}^t[b_1, b_2, b_3]$ に対し, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の **外積**, または **ベクトル積** といわれる空間ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が成分を用いて次の様に定められる:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \mathbf{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix} \quad \left(= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$$

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積を $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のなす角を θ とするとき, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の長さ (大きさ) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ は,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta \quad \therefore \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \theta \end{aligned}$$

より $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しい. また, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と空間ベクトル $\mathbf{c} = {}^t[c_1, c_2, c_3]$ の内積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

特に, $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ とおけば $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| = 0$ などより $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$. 即ち $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に直交している.

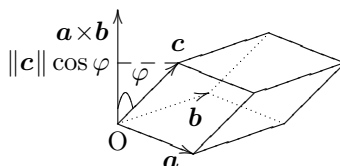
なお, $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 \geq 0$ であり, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が一直線上にあれば $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ になる.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ がそれぞれ右手の親指, 人差し指, 中指の上にあるとき ベクトルの組 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ を右手系という. 基本ベクトルの組 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ が右手系のとき座標系も右手系という. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 = {}^t[1, 0, 0]$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2 = {}^t[0, 1, 0]$ のとき $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = {}^t[0, 0, 1] = \mathbf{e}_3$ で, $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ が右手系のとき $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ も右手系になる.

空間ベクトルの外積

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に直交し, その長さ $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積に等しく, 右手系の座標系では $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ も右手系になる.

一般の $\mathbf{c}$ に対し, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のなす角を φ とすれば $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cos \varphi$ で, $\|\mathbf{c}\| \cdot \cos \varphi$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平行四辺形からの高さになる. 従って $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\| \cos \varphi = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ の作る平行六面体の符号付き体積になり, $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] > 0$ のとき $\cos \varphi > 0$ より $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の作る平面に関し $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と同じ側にあるので $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ は右手系, 逆に $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] < 0$ のとき $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ は左手系になる. (このとき図形は裏向きで負の体積をもつと考える.)



3 次の行列式

$\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の符号付き体積に等しく, その符号は, 右手系の座標系では $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ が右手系のとき正, 左手系のとき負になる.

なお, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のスカラー三重積ともいわれる.

3 次の行列 $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ の定める一次変換 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ は $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}$, $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{c}$ であり, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の作る単位立方体を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体に移す. その体積の比は $|\det A|$ に等しく, $\det A < 0$ のときは右手系を左手系に移す. このことは空間のどんな図形に対しても成り立つ. 即ち

一次変換と行列式

3 次行列式 $|A|$ の値は行列 A の定める一次変換によって移る図形の符号付き体積の比 (拡大率) を表す.

(微積分学における重積分の変数変換で用いられる関数行列式 (ヤコビ行列式, ヤコビアン) は無限小面積や体積の拡大率を表す.)