

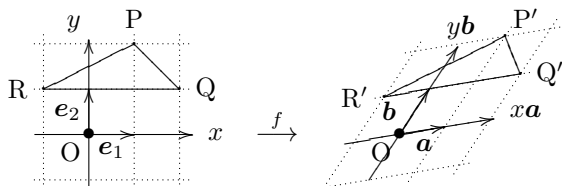
重積分の変数変換

一次変換 (線形変換) (線形代数から) $m \times n$ 実行列 $A = [a_{ij}]$ に対し, $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ を対応させる写像 $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ を A の定める**線形写像** (一次写像) といい, 特に $m = n$ のとき (A は正方行列), $\mathbf{f}$ を**一次変換**, または**線形変換**という. このとき, $\mathbf{f}$ のヤコビ行列 $J\mathbf{f}$ は A になる:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \Rightarrow J\mathbf{f} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

二次 (三次) の列ベクトルは座標平面 $\mathbb{R}^2$ (座標空間 $\mathbb{R}^3$) 上の点や原点を始点とする有向線分とみなしておく.

$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (基本ベクトルという) とするとき, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1x + \mathbf{e}_2y$. 二次行列 $A = [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の定める一次変換は $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = [\mathbf{a} \ \mathbf{b}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1)x + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)y$ ($A\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}$, $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{b}$). これを図示すると:



特に, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の作る単位正方形を $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形にうつしている.

二次の行列式 行列 $A = [\mathbf{a} \ \mathbf{b}]$ の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ の絶対値は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に等しい.

証明は例えば, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とし, $|\mathbf{a}|$ は $\mathbf{a}$ の長さ $\sqrt{a^2 + c^2}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ac + bd$ を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と書くと, $S = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$ ($\sin \theta \geq 0$) より

$$\begin{aligned} S^2 &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \\ &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2. \quad \therefore S = |ad - bc|. \end{aligned}$$

($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が一直線上にあれば この平行四辺形はつぶれており 面積は 0 と考える.)

横 $|\Delta x|$, 縦 $|\Delta y|$ の $\mathbf{e}_1 \Delta x$, $\mathbf{e}_2 \Delta y$ の作る長方形 (面積 $|\Delta x \Delta y|$) は $\mathbf{a} \Delta x$, $\mathbf{b} \Delta y$ の作る平行四辺形にうつされ, その面積は, (S の $(a, c), (b, d)$ に $(a \Delta x, c \Delta x), (b \Delta y, d \Delta y)$ を代入して) $|\Delta x \Delta y| S$ になる. 即ち $|\det A|$ は $\mathbf{f}$ によってうつされる図形の面積の比 (拡大率) を表す. ($\det A$ は符号付面積の拡大率を表す.) 従って, $\mathbf{u} = {}^t(u, v) = A\mathbf{x}$ ($\det A \neq 0$) とするとき, $|\Delta u \Delta v| = |\det A| |\Delta x \Delta y|$ と考えられる.

同様に, 三次行列式 $\det A = |\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}|$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の符号付の体積や体積の拡大率を表し (プリント参照), また, n 次の行列式は n 次元の平行体の符号付の体積 (測度) や拡大率を表すと解釈される.

写像 $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R}^n$) を**変換**ということにする, C^1 級変換 $\mathbf{f}$ が $\mathbf{a}$ で $\det J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$ ならば $\mathbf{a}$ を中心とする十分小さい区間 I の像は行列 $J\mathbf{f}(\mathbf{a})$ の定める「一次近似」 $J\mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{a})$ で近似され, その像 $\mathbf{f}(I)$ の測度は $|\det J\mathbf{f}(\mathbf{a})| |I|$ に十分近いことが示される (誤差を細かく見積る必要がある). (図) また, 逆写像をもつことが必要となるので次の用語を導入する: 一般に, 写像 $\mathbf{f}: X \rightarrow Y$ が**単射**, 又は**1 対 1** とは, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}')$ ならば $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ が (対偶: $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ならば $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}(\mathbf{x}')$ も) 成り立つときをいう. (このとき, 像 $\mathbf{f}(X)$ からの逆写像がある. また, このとき X と $\mathbf{f}(X)$ は**1 対 1** に対応するともいう.)

定理 (重積分の変数変換) C^1 級変換 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ が可測集合 E を含むある開集合上で定義されて E 上単射かつ $\det J\mathbf{f} \neq 0$ とし, $D = \mathbf{f}(E)$ とする. また, 関数 $g(\mathbf{y})$ は D 上有界連続とする. このとき

$$\int_D g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_E g(\mathbf{f}(\mathbf{x})) |\det J\mathbf{f}| d\mathbf{x}$$

(注) 上の D, E の条件は, 積分値に寄与する部分, 即ち D, E から測度 0 の集合を除き, 更に E から $\det J\mathbf{f} = 0$ となる点全体を除いた部分 D', E' が, 1 対 1 に対応している, に置き換えられる. (例えば有限個の点を除いて成り立つ等). なお, $\det J\mathbf{f} = 0$ となる点全体の集合の $\mathbf{f}$ による像の測度は 0 になることが知られている.

通常変換は, 二変数なら $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ (三変数なら $(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$) などと表され, そのヤコビ行列式 (ヤコビアン) を $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ と表すと, 有界連続関数 $f(x, y)$ の積分は次の様になる:

定理 5.2.1

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$$

変数変換の例

(1) 一次変換 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{f}(u, v) = \begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} =: A\mathbf{u}$, $ad-bc \neq 0$ のとき $\left(A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\right)$,

$\mathbf{f}$ は全平面 $\mathbb{R}^2$ から全 $\mathbb{R}^2$ への逆写像 $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x})$ をもつ C^∞ 級変換であり, 変数変換は

$$dxdy = |ad-bc|dudv$$

(2) 極座標変換 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{f}(r, \theta) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$. $\det J\mathbf{f} = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$. $dxdy = r dr d\theta$.

($r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) これは C^∞ 級変換であり, $r\theta$ -平面上の $\Omega := \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ で単射 かつ $\det J\mathbf{f} \neq 0$. $r=0$ 及び $(x, y) = (0, 0)$ は測度 (面積) 0 なので, $\mathbf{f}(E) = D$ ならば

$$\iint_D g(x, y) dxdy = \iint_E g(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

以下同様に, (体積 0 の集合を除いて,)

(3) 空間の円柱座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{bmatrix}$. $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$. $dxdydz = r dr d\theta dz$ ($r \geq 0$) (図)

(4) 空間極座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{bmatrix}$. $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$

($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$). (θ は天頂角, φ は方位角という. 行列式の計算は, 第 2, 3 列の r を括り出し, 第 3 行で展開すると $r^2(\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = r^2 \sin \theta$.) $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\sin \theta \geq 0$ ($r=0$, $\theta=0, \pi$ の体積は 0) で,

$$dxdydz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

例題 5.2.1 $\iint_D (x-y)^2 dxdy$, $D = \{(x, y) \mid |x+2y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$ の値を求める:

計算 積分領域を表しやすくするため, $(x+2y, x-y) = (u, v)$ と変換すると,

$$E = \{(u, v) \mid |u| \leq 1, |v| \leq 1\}, (x-y)^2 = v^2, J' = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = J'^{-1} = -\frac{1}{3}.$$

$$\iint_D (x-y)^2 dxdy = \iint_E v^2 |J| dudv = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 v^2 dv = \frac{4}{9}.$$

例題 5.2.2 $\iint_D (x^2+y^2) dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$ ($a > 0$) の値を求める:

計算 極座標に変換すると $x^2+y^2 = r^2$, $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ より,

$$\iint_D (x^2+y^2) dxdy = \iint_E r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

例 $I = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy$ ($D = \{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq a^2\}$ ($a > 0$)) (上半球体の体積)

計算 極座標に変換すると $E = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $\sqrt{a^2-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-r^2}$ より,

$$I = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2} dxdy = \iint_E \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2-r^2)^{1/2} (r dr) = 2\pi \left[-\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3} \right]_0^a = \frac{2\pi}{3} a^3$$

補足 (測度 (面積) 0 の集合) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の線分, 連続関数 $y = f(x)$ ($x \in I = [a, b]$) のグラフ C , C^1 級曲線 $\mathbf{f}(t)$ ($t \in I = [a, b]$) はいずれも面積 0 になる. (線分は C^1 級曲線.)

証明 関数のグラフ C について: $mC = 0$ は $f(x)$ ($x \in I = [a, b]$) の可積分性と同値, 即ち, $S[f, \Delta] - s[f, \Delta] = \sum_{\Delta} w_i \Delta x_i = C$ を覆う長方形の面積の和 ($w_i = M_i - m_i$), より $S(f) - s(f) = 0 \Leftrightarrow \bar{m}C \leq \inf_{\Delta} w_i \Delta x_i = 0$. 連続関数の可積分性より $S(f) - s(f) = 0$, $\therefore mC = \bar{m}C = 0$.

C^1 級曲線 C について: $\mathbf{f}(t) = (x(t), y(t))$ とし, 定義域 $I = [a, b]$ ($|I| = b-a$) を n 等分し, 小区間を I_i , その中点を t_i ($i=1, \dots, n$) とする. $M := \max\{|x'(t)| + |y'(t)| \mid t \in I\}$, $K := M|I|$ とおくと, 平均値の定理より $t \in I_i \Rightarrow |x(t) - x(t_i)|, |y(t) - y(t_i)| \leq M|I|/2n = K/2n$. つまり, C の I_i 上の部分は中心 $(x(t_i), y(t_i))$, 一辺 K/n の正方形で覆われ, C は n 個の正方形で覆われるので, 総面積は $nK^2/n^2 = K^2/n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

尚, $D \subset \mathbb{R}^2$ の特性写像 χ_D について, $S[\chi_D, \Delta] - s[\chi_D, \Delta]$ は境界を覆う長方形の面積の和だから,

D が可測 (面積確定) $\Leftrightarrow D$ の境界の測度 (面積) が 0.

従って, 有限個の線分, 連続関数のグラフ, C^1 級曲線で囲まれた有界領域は面積確定になる.