

実数の性質

実数の基本的性質 (公理) は次の3つに纏めることができる. (他の性質はこの3つから導ける.)

(A) **四則演算**: $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, 和 $a+b$, 差 $a-b$, 積 ab , 商 a/b ($b \neq 0$) が $\mathbb{R}$ の中に存在して, 和, 積に関して交換律, 結合律, 分配律をみたす.

(B) **大小関係**: $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $a=b, a<b, a>b$ のいずれかが成り立ち, 次をみたす: $a<b$ のとき, (1) $b<c \Rightarrow a<c$, (2) 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $a+c < b+c$, (3) 任意の $c>0$ に対し $ac < bc$.

(ここまでは, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ でも成り立ち, $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ でも (B) と, (A) の一部分については成り立っている.)

(C) **実数の連続性** (これは $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ を区別する重要な性質だが, これを述べる為に幾つかの用語を準備する.)

用語の定義: $\mathbb{R}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し, ある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, $a \in A \Rightarrow a \leq K$ (A の全ての元は K 以下) をみたすとき, A は上に有界であるといい, K を A の (1つの) 上界 という. このとき $A \subset (-\infty, K]$ で, $K \leq K'$ なら K' も A の上界になる. 同様に, 不等号の向きを逆にして, 下に有界, 下界も定義される. 上下に有界のとき, (単に) 有界であるという. このとき A はある閉区間 $[K', K]$ に含まれる. ($A \subset [K', K]$. $\therefore |a| \leq \max\{|K|, |K'|\}$ ($a \in A$).) A の上界 K が $K \in A$ のとき, K は A の最大値 (maximum) であるといい, K を $\max A$ と表す. 同様に, A の最小値 (minimum) を $\min A$ と表す. ($\max(A), \min(A)$ と表す.)

例: $A_1 := [0, 1]$ (閉区間), $A_2 := (0, 1)$ (開区間), $A_3 := (0, 1) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ は何れも有界だが, 最大値をもつのは A_1 のみ ($\max A_1 = 1$). しかし, 最小の上界は何れも 1 で, 最大値に近い性質をもつ.

上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上界全体の集合の最小値を上限 (supremum) (又は, 最小上界) といい $\sup A$ と表す.

$K = \sup A \iff$ (1) (K は上界) $a \leq K$ ($a \in A$),

(2) (最小性: $x < K$ なら x は上界でない $\Leftrightarrow$) $x < K \Rightarrow x < a$ をみたす $a \in A$ がある.

同様に, 下に有界な A の下界の最大値を下限 (infimum) といい $\inf A$ と表す.

$K = \inf A \iff$ (1') (下界) $a \geq K$ ($a \in A$), (2')(最大性) $x > K \Rightarrow x > a$ をみたす $a \in A$ がある.

注 A が上に (又は下に) 有界でないとき $\sup A = \infty$ (又は $\inf A = -\infty$) と表す.

(C) **実数の連続性** 上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は上限をもつ.

このとき, A が上に有界なら, $K = \sup A$ とし, B を A の上界全体の集合とすると, $B = [K, \infty)$, $A \subset (-\infty, K]$.

(C) より, 下に有界な $A \subset \mathbb{R}$ は下限をもつ. 実際, $-A := \{-a \mid a \in A\}$ は上に有界で, $\inf A = -\sup(-A)$.

(注) 上に有界な $A \subset \mathbb{Q}$ は必ずしも $\mathbb{Q}$ の中に上限をもたない. 例: $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ とすれば $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (A,B,C) より導かれる $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ の基礎的な性質をあげる.

(D) **アルキメデス (Archimedes) の原理** $\mathbb{N}$ は上に有界でない.

($\therefore$) (背理法) 上に有界と仮定すると上限 K がある. $\therefore K-1 < m \in \mathbb{N}$ がある. $\therefore K < m+1 \in \mathbb{N}$ となり矛盾.

(E) **有理数の稠密性** 異なる2数の間には有理数が存在する.

($\therefore$) $a < b$ とする. (D) より $1/(b-a) < n \in \mathbb{N}$ がある. $\therefore na+1 < nb$. (D) より $-na, na < m \in \mathbb{N}$ がある. $-m < na < m$ より $-m$ と m の間で $k-1 \leq na < k$ となる $k \in \mathbb{Z}$ がある. このとき $a < k/n \leq (na+1)/n < b$.

次に (C) より導かれる (実は (C) と同値な) $\mathbb{R}$ の性質を述べる.

数列 $\{a_n\}$ は $a_n \leq a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$) のとき (単調) 増加列という. 減少列も同様に定義し, これらを総称して単調数列という. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界とは $a_n \leq K$ ($n \in \mathbb{N}$) となる $K \in \mathbb{R}$ が存在するときをいう. これは集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界と同じ. 下に有界や有界も同様に定義する. 上に有界な増加列は有界である.

定理 C1 (公理 p3) 有界な単調数列は収束する.

($\therefore$) $\{a_n\}$ を増加列とし, $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ として $a_n \rightarrow a$ を示す. $\forall \varepsilon > 0$ に対し, (最小性より) $a-\varepsilon < a_N$ となる N がある. (上界より $a_n \leq a$ で, 増加列と併せて) $a-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$. $\therefore |a_n - a| < \varepsilon$ ($n \geq N$).

高校では実数は (有理数と) 無限小数で表される数とされた. 一般に, (正の) 無限小数

$a = m.n_1n_2n_3 \dots$ ($m, n_k \in \mathbb{Z}, 0 \leq n_k \leq 9$) ($m \geq 0$) は数列 $a_0 = m, a_1 = m.n_1, a_2 = m.n_1n_2, \dots, a_k = m.n_1 \dots n_k, \dots$

の極限值と定義される. $\{a_n\}$ は ($a \geq 0$ のとき) $m \leq a_n \leq m+1$ より有界な増加列なので, 実数の連続性 (C1) は $\{a_n\}$ の極限值 a , 即ち無限小数 a の存在を保証する.

定理 C2(カントール (Cantor) の区間縮小法) 縮小する閉区間列 $I_n = [a_n, b_n]$ ($n \in \mathbb{N}$), $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ならば $c \in I_n$ ($n \in \mathbb{N}$) となる唯1つの $c \in \mathbb{R}$ が存在する.

($\therefore$) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ だから, $\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界な単調数列なので収束する (C1).

$a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ とすると $b-a = \lim(b_n - a_n) = 0$ (1.1.1(1)) より $b=a$. $a_n \leq a=b \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) より $c:=a=b$.

数列 $\{a_n\}$ の一部分を順序を変えずに取り出してできる数列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($n_1 < n_2 < \dots$) を $\{a_n\}$ の **部分列** という。

定理 C3(ボルツァノ・ワイエルシュトラス (Bolzano-Weierstrass) の定理) 有界数列は収束部分列を含む。

($\because$) $\{a_n\}$ を有界数列, $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset I_1 := [p_1, q_1]$ とし, 区間の長さを $|I_1| (= q_1 - p_1)$ と表す. I_1 を中点 $(p_1 + q_1)/2$ で分け, $\{a_n\}$ の無限個の項を含む方を $I_2 = [p_2, q_2]$ とする. ($|I_2| = \frac{1}{2}|I_1|$) (両方とも無限項を含むときはどちらでもよい.) 同様に I_2 を中点で分け, 無限個の項を含む方を I_3 とし, これを繰り返すと閉区間の縮小列 $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ をえる. $q_n - p_n = |I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \dots = |I_1|/2^{n-1}$ より $|I_n| \rightarrow 0$. よって $c \in I_n$ ($n \in \mathbb{N}$) となる c がある (C2).

部分列 $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ を, $a_{n_1} \in I_1$ を任意にとり, $a_{n_2} \in I_2$ を $n_1 < n_2$ となる様にとり (無限個含むので可能), これを繰り返して $a_{n_k} \in I_k$ ($n_{k-1} < n_k$) となる様につくる. $p_k \leq a_{n_k} \leq q_k$, $p_k, q_k \rightarrow c$ より $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は c に収束する.

数列 $\{a_n\}$ が **コーシー (Cauchy) 列** (又は**基本列**) とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(***) \quad m, n \geq N \implies |a_n - a_m| < \varepsilon$$

をみたすときをいう. また, この条件を **コーシーの (判定) 条件** という.

収束数列はコーシー列である. 実際 $a_n \rightarrow a$ のとき, $\varepsilon > 0$ に対し, $N = N(\varepsilon/2)$ をとれば, $m, n \geq N$ ならば

$$|a_n - a_m| \leq |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

定理 C4 (1.4.1 コーシー列の収束) コーシー列は (実数に) 収束する. ($\therefore \{a_n\}$ はコーシー列 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ は収束列.)

($\because$) まずコーシー列 $\{a_n\}$ は有界, を示す (定理 1(2) と同様). ($\varepsilon = 1$ として) $N = N(1)$ をとれば $|a_n - a_m| < 1$ ($m, n \geq N$). とくに $|a_n - a_N| < 1$ ($n \geq N$). よって $\{a_n | n \geq N\}$ は有界なので $\{a_n\}$ も有界.

次に収束を示す. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. (C3) より $\{a_n\}$ は収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を含むので, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ とする.

($|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$ なので) $\{a_n\}$ に対し $N_1 = N(\varepsilon/2)$ をとれば $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ ($m, n \geq N_1$). $\{a_{n_k}\}$ に対し $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ かつ $n_k \geq N_1$ となる a_{n_k} を選べば, 全ての $n \geq N_1$ に対し,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

補足 ここまでで (C) $\Rightarrow$ (C1) $\Rightarrow$ (C2) $\Rightarrow$ (C3) $\Rightarrow$ (C4) が示されている.

(C4) $\Rightarrow$ (C) を示せばこれらが同値であることが分る.

($\because$) $C \subset \mathbb{R}$ を上に有界な集合とし, B を上界全体の集合, A を B の補集合 ($A := \{x \in \mathbb{R} | x \notin B\}$) とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の様に定める: $a_1 \in C, b_1 \in B$ を任意にとる. ($a_1 \leq b_1$. $a_1 = b_1$ なら $\sup C = a_1$. $\therefore a_1 < b_1$ とする.) $d := |b_1 - a_1| (= b_1 - a_1)$ おく. a_1, b_1 の中点を $d_2 (= (a_1 + b_1)/2)$ とし,

$$d_2 \in A \text{ なら } a_2 := d_2, b_2 := b_1, \quad d_2 \in B \text{ なら } a_2 := a_1, b_2 := d_2 \text{ とする. このとき } |b_2 - a_2| = d/2.$$

これを繰り返して $\{a_n\}, \{b_n\}$ ($a_n \in A, b_n \in B, |b_n - a_n| = d/2^{n-1}$) をえる. (C2, C3 の証明と同様 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.)

このとき $\{b_n\}, \{a_n\}$ はコーシー列になり, 極限値 b (C4 より存在) が C の上限になる. (b の存在は, $\{b_n\}$ は有界な減少列より (C1) から, $I_n := [a_n, b_n]$ は縮小閉区間列で $|I_n| = d/2^{n-1} \rightarrow 0$ なので (C3) から出る.)

コーシー列になること: $m, n \geq N$ なら $|b_n - b_m| \leq |b_n - b_N| + |b_N - b_m| \leq |a_N - b_N| + |b_N - a_N| = d/2^{N-2}$ なので, $\varepsilon > 0$ に対し $d/2^{N-2} < \varepsilon$ となる N により $m, n \geq N \Rightarrow |b_n - b_m| < \varepsilon$. $\{a_n\}$ も同様で $|b_n - a_n| = d/2^{n-1}$ より $\lim a_n = b$.

上限になること: $c \in C$ とすれば $c \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) (上界だから). $\therefore c \leq \lim b_n = b$. $\therefore b$ も上界.

(最小性) $a < b = \lim a_n$ なら $a < a_n$ となる a_n があり, a_n は上界でないから $a_n < c$ となる $c \in C$ があって $a < c$, $\therefore b$ は C の上限.

デデキント (Dedekind) の切断 $\mathbb{R}$ を, 空でない部分集合 A, B ($\neq \emptyset$) で, $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$ をみたす様に 2 つに分けたとき ($A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset$), 組 (A, B) を **デデキントの切断** という.

定理 C5 (A, B) を切断とすると, $\max A$ と $\min B$ のどちらか一方が存在する.

(注) $\max A$ と $\min B$ の両方が同時に存在することはなく, 1 つの実数 s ($:= \sup A = \inf B$) を確定する. $s \in A$ なら $s = \max A, A = (-\infty, s], B = (s, \infty)$. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ でも同様に切断が定義出来るが, $\mathbb{Q}$ の中には $\max A, \min B$ のどちらも存在しないこともある (無理数で切断したとき). $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ では, この中に常に両方とも存在する.

(C5) も実数の性質を表すもので実数の連続性公理 (C) と同値である.

(同値性の証明の概略) (C) $\Rightarrow$ (C5): (A, B) を切断とすると A は上に有界 (で全ての $b \in B$ は A の上界) になる.

(C) より $s = \sup A$ が存在するが, $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset$ なので $s \in A, s \in B$ のどちらか一方が成り立つ. $s \in A$ なら $s = \max A, s \in B$ なら $s = \min B$ となる.

(C5) $\Rightarrow$ (C): $C \subset \mathbb{R}$ は上に有界とし, B を C の上界全体の集合, A を B の補集合とすると (A, B) は切断になる. このとき (C5) より $s \in \mathbb{R}$ が存在して $s = \min B$ 又は $s = \max A$ をみたす. $s = \max A$ ($\because s \in A, s \notin B$) と仮定すると, s は C の上界でないので $s < c$ となる $c \in C$ があり, $s < a < c$ なる $a \in \mathbb{R}$ は $a \in A$ となるので, s の最大性に矛盾する. $\therefore s = \min B$ となるので $\sup C \equiv \min B$ が存在する.