(重) 積分

復習 (原始関数) 区間 I 上定義された関数 $f(x)$ に対し, I 上微分可能な関数 $F(x)$ で, $\quad F'(x)=f(x) \quad$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という. $F(x)+C$ (C は定数) も $f(x)$ の原始関数であり, 逆に, 区間上 $G'(x)=f(x)$ なら $G(x)=F(x)+C$ も平均値の定理の系を用いて示される. この C を**積分定数**という. また, 原始関数を纏めて $\int f(x)dx$ と表す : $\int f(x)dx=F(x)+C$ これを, $f(x)$ の**不定積分**というが, 本来の意味の不定積分は定積分として定義される $\int_a^x f(x)dx$ である (後述).
不定積分は微分の逆演算, つまり $F(x)=\int f(x)dx$ は $F'(x)=f(x)$ の言い換えなので導関数の公式を書き換えれば不定積分の公式をえる (積分定数略) : (α,β は定数)
1.(線形性) $\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$. 2.(部分積分) $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$.
3.(置換積分) $x=g(t)$ が C^1 級のとき $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$. 4. $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|$ (置換積分による).

基本的な関数の原始関数 以下, $a\neq 0$. 証明は右辺を微分する.
(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\ (\alpha\neq-1),\quad \int\frac{1}{x}dx=\log|x|.$ (2) $\displaystyle\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax},\quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}\ (a>0,\ a\neq 1).$
(3) $\displaystyle\int\log|x|\,dx=x\log x-x.$ (4) $\displaystyle\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b),\quad \int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b).$
(5) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx=\frac{1}{a}\tan(ax+b),\quad \int\tan(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\log|\cos(ax+b)|.$ (6) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\Big|\frac{x-a}{x+a}\Big|.$
(7) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a},\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$ (8) $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\Big)$ ((7,8) $a>0$).
(9) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\log\big|x+\sqrt{x^2+A}\big|.$ (10) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+A}+A\log\big|x+\sqrt{x^2+A}\big|\Big)$ ((9),(10) $A\neq 0$).
(1),(2),(4),(5),(7) は基本的 (但し, $t=ax+b$ 等の置換積分を用いている).
微分以外の計算法は部分積分, 置換積分を用いる.
(3) 部分積分 $f(x)=\log|x|, g(x)=1$ とおくと, $\int\log|x|\,dx=x\log x-\int x(\log|x|)'dx=$ 右辺.
(6) 部分分数分解 $1/(x^2-a^2)=(2a)^{-1}(1/(x-a)-1/(x+a))$ を積分.
(7) 置換積分 $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-(x/a)^2}$ として $x=a\sin\theta$ とおくと (7)$=\int 1d\theta=\theta$. 右も同様に $x=a\tan t$ とおく.
(8) 部分積分して (7) を用いる. (9),(10) $\sqrt{x^2+A}=t-x$ とおく.
逆関数の積分は部分積分による: $y=y(x)$, $x=x(y)$ と表すと $\int xdy=xy-\int y\frac{dx}{dy}dy=xy-\int y(\frac{dy}{dx})^{-1}dy$.

教科書 3.2 節に, 有理式, $f(x)$ が x と $\sqrt[n]{ax+b}$ ($a\neq 0$) の有理式, $f(x)$ が x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a\neq 0$) の有理式, 三角関数の有理式, 漸化式を用いた計算法などが載っている. 例えば

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x dx=\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n:\text{偶数})\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n:\text{奇数})\end{cases}\qquad n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2 & (n:\text{偶数})\\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1 & (n:\text{奇数})\end{cases}\qquad 0!!=(-1)!!=1$$

定積分, 重積分 積分 = 定積分: 多重積分を含め積分は本来定積分として定義されている, 即ち, $y=f(x)$ や $z=f(x,y)$ のグラフと x 軸や xy 平面との間の部分の符号付面積や符号付体積 ($f\geqq 0$ の部分と $f\leqq 0$ の部分の面積や体積の差) である. (図) これにより $f(x)=[x]$ の様な不連続な関数の積分も定義される. なお, 面積や体積は「区分求積法」により定義される.

準備 (上限, 下限) 開区間 $(0,1)$ の様に一般には部分集合 $A\subset\mathbb{R}$ は最大値, 最小値を持たないが, $1,-1$ はその代りを果たしている. それを上限, 下限という.
$A\subset\mathbb{R}$ に対し, $a\in A\Rightarrow a\leqq K$ をみたす $K\in\mathbb{R}$ があるとき, A は**上に有界**といい, K を A の (1 つの) **上界** (upper bound) という. ($A\subset(-\infty,K]$, $K\leqq K'$ なら K' も上界.) A の上界 K が $K\in A$ のとき, K は A の**最大値** (maximum) であるといい, K を $\max A$ ($\max(A)$) と表す. 同様に, 不等号の向きを逆にして, **下に有界**, **下界**, **最小値** (minimum) $\min A$ ($\min(A)$) も定義される. 上下に有界のとき, (単に) A は**有界**という.
A が上に有界のとき, A の上界全体の集合の最小値を A の**上限** (supremum, 最小上界) といい, $\sup A$ ($\sup(A)$) と表す. また, A が上に有界でないときは, $\sup A=\infty$ とする. $K=\sup A<\infty \iff$
(1) (K は上界) $a\in A\Rightarrow a\leqq K$. (2) (最小性 : $x<K$ なら x は上界でない $\Leftrightarrow$) $x<K\Rightarrow x<a$ なる $a\in A$ がある.

上下をかえて, A が下に有界のとき **下限** (infimum) が定義され $\inf A$ と表し, そうでないとき $\inf A = -\infty$ と表す.

実数の連続性公理 上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は上限 K $(\in \mathbb{R})$ をもつ.

により, $A \subset \mathbb{R}$ には ($+\infty$ も含め) 必ず $\sup A$ が定まる.
A が下に有界のときも $\inf A = -\sup\{-a \,|\, a \in A\}$ として下限が存在する.
(注) これは「上に有界な単調増加数列は実数に収束する」と同値.

区分求積法: 有界な図形の面積や体積を測るには次に述べる区分求積法が用いられる (地図上の池の面積を測る図):
まず, 辺が座標軸に平行な (長方形, 直方体等を総称した) 閉**区間** $I := \{\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_i \leqq x_i \leqq b_i,\ i=1,\dots,n\}$ $=: \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ ($\prod$ は積の記号) の (面積, 体積, 長さ等を総称した) **測度** (measure) は

$$|I| := |b_1-a_1| \cdots |b_n-a_n| =: \prod_{i=1}^n |b_i-a_i| \quad \text{(長方形：横×縦, 直方体：横×縦×高さ)}$$

で与えられる. 開区間 $\prod_{i=1}^d (a_i, b_i)$ や半開区間 $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i)$ の測度も同じ $\prod_{i=1}^n |b_i-a_i|$ とする. これら区間を I と表す. (平行四辺形, 三角形, 台形等の面積はこれを基に等積変形等により求められる.)
一般の $\mathbb{R}^n$ 内の図形 D の測度は区間を用いて外側と内側から測り, 両者の値が一致するとき D を**可測** (面積確定, 体積確定) といい, その値 mD を測度という. より詳しくは, D を (閉又は半開) 区間 $I_1, I_2 \dots$ で覆い ($D \subset \cup_j I_j$), その測度の和 $\sum_j |I_j|$ の $\{I_j\}$ を細かくしたときの (極限である) 下限を**外測度**といい $\overline{m}D$ と表す：

$$\overline{m}D := \inf\{\textstyle\sum_j |I_j| \,|\, D \subset \cup_j I_j\} \quad (\{I_j\} \text{ の内部は交わらないとする, 特に交わらない半開区間として良い.})$$

内測度 $\underline{m}D$ も同様に $\underline{m}D := \sup\{\sum_j |I_j| \,|\, D \supset \cup_j I_j\}$ と定義し, $\overline{m}D = \underline{m}D$ のとき $mD := \overline{m}D$ とする.
(注) ここで, 平面上の直線の面積は 0 , 空間内の平面の体積も 0 なので, D に測度 0 の集合を加えても測度は変わらない, $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ (無限個) でも良いという様に, この考え方を発展させた積分を**ルベーグ (Lebesgue) 積分**という.

定積分 (Riemann(リーマン) 積分) 一変数関数の積分, 多変数関数の重積分共に, 定義域も関数も**有界** ($|f(\boldsymbol{x})| \leqq K$) とし (有界でないときは後述の広義積分になる), (リーマン) 積分は, 関数値方向には区切らなくて良いという考えの下にまず定義域を閉区間としてこれを分割して定義される. 簡単の為, 一変数関数 $f(x)$ の定積分から始める.

- $f(x)$ を閉区間 $I = [a, b]$ 上の有界関数とする. I を小区間に分け, 分点を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ とし, この分割 Δ に対し $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k := |x_k - x_k|$ $(k=1,\dots,n)$, $|\Delta| := \max\{\Delta x_k \,|\, 1 \leqq k \leqq n\}$ とする. また, 区間 I_k における $f(x)$ の上限を M_k, 下限を m_k とし, $S[f,\Delta]$, $s[f,\Delta]$ を次で定める:(ここで $\sum_\Delta := \sum_{k=1}^n$) (図)

$$M_k := \sup\{f(x) \,|\, x \in I_k\},\ m_k := \inf\{f(x) \,|\, x \in I_k\},\ S[\Delta] = S[f,\Delta] := \textstyle\sum_\Delta M_k \Delta x_k,\ s[\Delta] = s[f,\Delta] := \sum_\Delta m_k \Delta x_k$$

($f \geqq 0$ のとき $S[\Delta]$ は外測度, $s[\Delta]$ は内測度にあたる.) 分割 Δ の分点を増やした分割 Δ' (**細分**という), 及び分割 Δ_1, Δ_2 の分点を合わせた分割 $\Delta_1 \cup \Delta_2$ (Δ_1, Δ_2 の細分になる) に対し, ($I_k \supset I_{k'} \Rightarrow m_k \leqq m_{k'} \leqq M_{k'} \leqq M_k$ より)

$$s[\Delta] \leqq s[\Delta'] \leqq S[\Delta'] \leqq S[\Delta], \qquad s[\Delta_1], s[\Delta_2] \leqq s[\Delta_1 \cup \Delta_2] \leqq S[\Delta_1 \cup \Delta_2] \leqq S[\Delta_1], S[\Delta_2] \quad \text{(図)}$$

そこで, 分割 Δ を動かしたときの $S[\Delta]$ の下限を $S = S(f)$, $s[\Delta]$ の上限を $s = s(f)$ とおく：

$$S = S(f) := \inf\{S[\Delta] \,|\, \Delta \text{は } I \text{ の分割}\}, \quad s = s(f) := \sup\{s[\Delta] \,|\, \Delta \text{は } I \text{ の分割}\}$$

$S(f)$ を f の**上積分**, $s(f)$ を f の**下積分**という. これらが一致するとき, f は $I = [a, b]$ で (リーマン) **積分可能** (integrable), 又は**可積分** (可積) といい, この値 $S(f)$ を f の I 上の**定積分**といい, $\int_a^b f(x)dx$ で表す：

$$\int_a^b f(x)dx := S(f) = s(f)$$

上積分, 下積分については次が成り立つ：

ダルブー (Darboux) の定理 f が I 上の有界関数ならば, $|\Delta| \to 0$ のとき $S[f,\Delta] \to S(f)$, $s[f,\Delta] \to s(f)$.

(この証明は本質的に $\varepsilon - \delta$ 論法を用いるので詳細は略すが, $|f(x)| \leqq M$ とし, $\varepsilon > 0$ に対し, $S[\Delta_\varepsilon] - S < \varepsilon/2$ となる分割 Δ_ε があるので, この分点の個数 p と小区画の最小幅 δ_ε を用いて $\delta := \min\{\delta_\varepsilon/2, \varepsilon/4pM\}$ とすれば $|\Delta| < \delta$ なる分割に対し, $S[\Delta] - S < \varepsilon$ が示される.)

各 I_k で $w_k := M_k - m_k$ とすると, $S[\Delta] - s[\Delta] = \sum_\Delta w_k \Delta x_k$ より, f が可積分 $\Leftrightarrow \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_\Delta w_k \Delta x_k = 0$. $\therefore$

系 f が I 上可積分 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ に対し $\sum_\Delta w_k \Delta x_k < \varepsilon$ となる分割 Δ がある.
ダルブー (Darboux) の定理より,

定理 3.4.2 f が閉区間 $I = [a, b]$ で可積分ならば, I の分割 Δ の各小区間内の点 $c_k \in I_k$ に対し,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_\Delta f(c_k) \Delta x_k \qquad \text{(右辺の和をリーマン和という)}$$

証明 各 I_k で, $m_k := \inf\{f(x)\,|\,x\in I_k\} \leqq f(c_k) \leqq \sup\{f(x)\,|\,x\in I_k\} =: M_k$ より $s[\Delta] \leqq \sum_\Delta f(c_k)\Delta x_k \leqq S[\Delta]$. この左右辺は, $|\Delta|\to 0$ のときダルブーの定理と f の可積分性より $\int_a^b f(x)dx$ に収束するので中辺もそう.

定理 3.4.1 閉区間 I 上の連続関数 $f(x)$ は可積分である.

この証明には次の**一様連続性**を用いる.

定理 1.4.2'　有界閉集合 D 上の連続関数 $f(\boldsymbol{x})$ は**一様連続**, 即ち, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, ある $\delta>0$ が存在して, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta \Rightarrow |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')|<\varepsilon$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in D)$. $(M(\delta) := \sup\{|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')| : \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in D,\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta\} \to 0\ (\delta\to 0).)$
(点 $\boldsymbol{x}'$ での連続性の定義では δ は $\boldsymbol{x}'$ と ε によるが, ここでは δ が $\boldsymbol{x}'$ によらず ε のみによるので「一様」がつく.)

証明 背理法: 連続だが一様連続でない: $\varepsilon>0$ があって, $\forall\delta>0$ に対し $|\boldsymbol{x}(\delta)-\boldsymbol{x}'(\delta)|<\delta$ だが $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')|\geqq\varepsilon$ となる $\boldsymbol{x}(\delta),\boldsymbol{x}'(\delta)\in D$ がある, と仮定. $\delta=1/n$ $(n\in\mathbb{N})$, $\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{x}(1/n), \boldsymbol{x}'_n=\boldsymbol{x}'(1/n)$ とおくと $\{\boldsymbol{x}_n\}$ は有界な D 内にあるので (C3)(B-W) により収束部分列 $\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ がある. $\boldsymbol{x}_0=\lim_k \boldsymbol{x}_{n_k}$ とすると D が閉なので $\boldsymbol{x}_0\in D$.
$|\boldsymbol{x}'_{n_k}-\boldsymbol{x}_0|\leqq|\boldsymbol{x}'_{n_k}-\boldsymbol{x}_{n_k}|+|\boldsymbol{x}_{n_k}-\boldsymbol{x}_0|<1/n_k+|\boldsymbol{x}_{n_k}-\boldsymbol{x}_0|\to 0\ (k\to\infty)$ より $\boldsymbol{x}'_{n_k}\to\boldsymbol{x}_0$.
f 連続より $f(\boldsymbol{x}_{n_k})\to f(\boldsymbol{x}_0)$, $f(\boldsymbol{x}'_{n_k})\to f(\boldsymbol{x}_0)$ $\therefore |f(\boldsymbol{x}_{n_k})-f(\boldsymbol{x}'_{n_k})|\to 0$ だが, これは $|f(\boldsymbol{x}_{n_k})-f(\boldsymbol{x}'_{n_k})|\geqq\varepsilon$ に矛盾.

3.4.1 の証明 $\forall\varepsilon>0$ に対し上の $\delta=\delta(\varepsilon/|I|)$ を取れば, $|\Delta|<\delta/\sqrt{d}$ なる任意の分割 $\Delta=\{I_k\}$ に対し $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|<\delta$, $\therefore$ $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')|\leqq\omega_k\leqq\varepsilon/|I|$ だから $\sum_k \omega_k|I_k|\leqq(\varepsilon/|I|)\sum_k|I_k|=\varepsilon$.

定理 閉区間 $[a,b]$ 上の単調関数 $f(x)$ は可積分である.

証明 単調増加として示す. 任意の分割 Δ に対し $w_k=f(x_k)-f(x_{k-1})$ より
$\sum_\Delta w_k\Delta x_k \leqq \sum_\Delta w_k|\Delta| = |\Delta|(f(b)-f(a))\to 0\ (|\Delta|\to 0)$.

(注) $a\geqq b$ の場合, $\int_a^a f(x)dx := 0$, $\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx$ と定める.

定積分の性質 (定義より出るので証明略) $f(x)$ は $I=[a,b]$ 上可積分とする.
(1) $f(x)$ は I に含まれる任意の閉区間上可積分である.
(2) **区間加法性** $a<c<b$ なら $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
(3) **線形性** f,g が I 上可積分なら $f\pm g$, $\alpha f, fg, \alpha f+\beta g$ (α,β は定数) も可積分で,

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

(4) f,g が I 上可積分で, $f(x)\leqq g(x)$ $(x\in I)$ なら $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$.
特に, ($|f(x)|$ も可積分で,) $\int_a^b f(x)dx\leqq\int_a^b|f(x)|dx$, $|\int_a^b(f+g)(x)dx|\leqq\int_a^b|f(x)+g(x)|dx\leqq\int_a^b|f(x)|dx+\int_a^b|g(x)|dx$.
(更に, 閉区間 I 上 f,g が連続で $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$ なら $f=g$, 特に $f\geqq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geqq 0$ で, $=$ なら $f(\boldsymbol{x})\equiv 0$.)
(5) **積分の平均値定理** $m\leqq f(x)\leqq M$ なら $\int_a^b f(x)dx=\alpha(b-a)$ をみたす α $(m\leqq\alpha\leqq M)$ がある.
f が連続なら $\alpha=f(c)$ となる c $(a<c<b)$ がある. ($\therefore$ $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$.)
($\because m(b-a)\leqq\int_a^b f(x)dx\leqq M(b-a)$ より $\alpha:=(\int_a^b f(x)dx)/(b-a)$ とする. 後半は, $f(x)\equiv\alpha$ なら任意の c $(a<c<b)$.
$f(x)\not\equiv\alpha$ なら $M_1:=\max\{f(x)\,|\,x\in I\}$, $m_1:=\min\{f(x)\,|\,x\in I\}$ (最大最小値定理による) とおけば,
$m_1(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M_1(b-a)$, $\therefore$ $m_1<\alpha<M_1$. 中間値定理により $\alpha=f(c)$ となる c $(a<c<b)$ がある.)

微分積分学の基本定理 ((4) のこと) $f(x)$ は $I=[a,b]$ 上可積分とし, $F(x):=\int_a^x f(t)dt$ $(a\leqq x\leqq b)$ とする.
(この $F(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**という.) このとき,
(1) 不定積分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ は I 上連続である.
(2) $f(x)$ が $x_0\in I$ で連続なら $F(x)$ は x_0 で微分可能で $F'(x_0)=f(x_0)$.
(3) $f(x)$ が I 上連続なら $F(x)$ は原始関数である.
(4) $f(x)$ が原始関数 $G(x)$ をもつなら $\int_a^b f(x)dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a)$.
(注) $G(x)$ が連続かつ有限個の点を除き微分可能で $G'(x)=f(x)$ でも $\int_a^b f(x)dx=[G(x)]_a^b$.
(略証) (1) $|f(x)|\leqq K$ とする. $|F(x+h)-F(x)|\leqq|\int_x^{x+h}f(t)dt|\leqq|\int_x^{x+h}|f(t)|dt|\leqq|\int_x^{x+h}Kdt|=K|h|\to 0\ (h\to 0)$.
(2) 増分 $\Delta F:=F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)dt=\alpha(h)h$ ((5) 平均値定理), $\alpha(h)$ は $[x_0,x_0+h]$ (又は $[x_0+h,x_0]$) での f の上限, 下限を $M(h),m(h)$ とすると $m(h)\leqq\alpha(h)\leqq M(h)$. f が x_0 で連続より $h\to 0$ のとき $M(h),m(h)\to f(x_0)$, $\therefore\alpha(h)\to f(x_0)$, $\therefore\Delta F/h=\alpha(h)\to f(x_0)$. $\therefore F'(x_0)=f(x_0)$. (3) はこれより出る.
(4) I の n 等分割 Δ (分点 $a=a_0<a_1<\cdots a_n=b$) をとると, 微分の平均値定理より $G(a_k)-G(a_{k-1})=f(x_k)\Delta a_k$ $(a_{k-1}<x_k<a_k,\ \Delta a_k:=a_k-a_{k-1})$. $\therefore G(b)-G(a)=\sum_{k=1}^n(G(a_k)-G(a_{k-1}))=\sum_k f(x_k)\Delta a_k\to\int_a^b f(x)dx\ (n\to\infty)$.
(注の $\because$) G の微分不能点で区間を分け, 各区間で成立すれば良い (足せば出る). $\therefore [a,b]$ 上 a で微分不能とする. (b でも同様.) $a<a'<b$ なら $\int_{a'}^b f(x)dx=G(b)-G(a')$, G 連続より $G(a')\to G(a)$ $(a'\to a)$, $\therefore\int_{a'}^b f(x)dx\to G(b)-G(a)$.

曲線の長さ　曲線 (=連続写像) $C:\boldsymbol{f}:I\to\mathbb{R}^n$ $(I=[a,b],\ \boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t)))$ を考える.
I の分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ に対し, C 上の点 $\boldsymbol{f}(t_{i-1}),\boldsymbol{f}(t_i)$ を結ぶ線分の長さの和を L_Δ とする : $L_\Delta:=\sum_\Delta|\boldsymbol{f}(t_{i-1})-\boldsymbol{f}(t_i)|$ (折れ線の長さによる近似). I の全ての分割に関する L_Δ の上限 $\sup\{L_\Delta\,|\,\Delta\}=:L=L(C)$ を曲線 C の**長さ**, 又は**弧長**といい, $L<\infty$ のとき, C は**長さをもつ**, 又は**求長可能**という.

定理 3.4.4' 曲線 $C:\boldsymbol{f}:I\to\mathbb{R}^n$, $(I=[a,b])$ が C^1 級ならば C は長さをもち, 長さ L は次式で与えられる :

$$L=\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{f_1'(t)^2+\cdots+f_n'(t)^2}dt=\int_a^b\sqrt{x_1'^2(t)+\cdots+x_n'^2(t)}dt=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2}\,dt$$

証明　I の分割 Δ に対し, $\Delta\boldsymbol{f}^{(i)}:=\boldsymbol{f}(t_i)-\boldsymbol{f}(t_{i-1})$, $\Delta t_i:=t_i-t_{i-1}$ とおけば, 各成分関数の平均値の定理より $\Delta f_j^{(i)}=f_j(t_i)-f_j(t_{i-1})=f_j'(c_j^i)\Delta t_i$ $(t_{i-1}<c_j^i<t_i)$.　$L_\Delta=\sum_\Delta|\boldsymbol{f}(t_{i-1})-\boldsymbol{f}(t_i)|=\sum_\Delta\sqrt{\sum_j|\Delta f_j^{(i)}|^2}=\sum_\Delta\sqrt{f_1'(c_1^i)^2+\cdots+f_n'(c_n^i)^2}\,\Delta t_i$.　f_j' と $\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ の (一様) 連続性より $|\Delta|\to 0$ のとき $L_\Delta\to L$,
右辺 $\to\int_a^b|\boldsymbol{f}'(t)|dt$　(定理 3.4.2).

関数 $f(x)$ に対し, 定理 3.4.4' で $\boldsymbol{f}(x)=(x,f(x))$ とおいて次をえる :

定理 3.4.3 関数 $f(x)$ が C^1 級ならば, 曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ は長さ L をもち,　$L=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx$.

(多) 重積分 (multiple integral)
多変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ も一変数関数関数のリーマン積分と基本的には同じだが, 次元が高いと区間の分割の記述が煩雑になるのでまず平面で記述して, 続いて一般次元の分割を記述する. 他は一変数と同様である.

区間の分割 区間=長方形 I を $I=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d\}$ とし, その分割 Δ を $\Delta: a{=}x_0<x_1<\cdots<x_m{=}b,\ c{=}y_0<y_1<\cdots<y_n{=}d$　とする. 小区間 (=小長方形) を $I_{ij}:=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $\Delta x_i:=|x_i-x_{i-1}|$, $\Delta y_j:=|y_j-y_{j-1}|$, $|I_{ij}|:=\Delta x_i\Delta y_j$(面積) , $|\Delta|:=\max_{i,j}\{\Delta x_i,\Delta y_j\}$ とし, $\{I_{ij}\}_{ij}$ の添字を付替えて $\{I_{ij}\}_{ij}=\{I_k\}_k$ とも表しておく.
一般の場合は, $I=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]\subset\mathbb{R}^n$ 上の各 $[a_i,b_i]$ に分点 $a_i{=}x_i^{(0)}<x_i^{(1)}<\cdots<x_i^{(m_i)}{=}b_i$ を取り, I を $m:=m_1\times\cdots\times m_n$ 個の小区間 $I_{j_1,\cdots,j_n}:=\prod_{i=1}^n[x_i^{(j_i-1)},x_i^{(j_i)}]$ に分ける. $\Delta x_i^{(j_i)}:=|x_i^{(j_i)}-x_i^{(j_i-1)}|$,　$|I_{j_1,\cdots,j_n}|:=\prod_{i=1}^n\Delta x_i^{(j_i)}$ とし, Δ をその分割, $|\Delta|=\max\{\Delta x_i^{(j_i)}\}$ とし, 添字を付替えて $\{I_{j_1,\cdots,j_n}\}=\{I_k\}$ とも表しておく.

上積分, 下積分, 積分　関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対し, ($f(x)$ と同様,)

$m_k:=\inf\{f(\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in I_k\}$,　$M_k:=\sup\{f(\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{x}\in I_k\}$,　$s[f,\Delta]:=\sum_\Delta m_k|I_k|$, $S[f,\Delta]:=\sum_\Delta M_k|I_k|$

とおくと ($m_k\leqq f(\boldsymbol{x})\leqq M_k$ $(\boldsymbol{x}\in I_k)$), Δ の細分 Δ' に対し,　$s[f,\Delta]\leqq s[f,\Delta']\leqq S[f,\Delta']\leqq S[f,\Delta]$.

$$S(f):=\inf_\Delta S[f,\Delta]=\lim_{|\Delta|\to 0}S[f,\Delta],\qquad s(f):=\sup_\Delta s[f,\Delta]=\lim_{|\Delta|\to 0}s[f,\Delta]$$

とおいて ($\inf=\lim,\ \sup=\lim$ はダルブーの定理), それぞれ**上積分**, **下積分**といい, これらが一致するとき $f(\boldsymbol{x})$ は I 上で**積分可能** (**可積 (分)**) といい, $S(f)=s(f)$ を $\int\cdots\int_I f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n$ (略して $\int_I f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, $\int_I f$) と表す:

$$\int\cdots\int_I f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n:=S(f)=s(f)\qquad \left(\int_I f(x)\,dx,\ \iint_I f(x,y)\,dxdy,\ \iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz,\cdots\right)$$

(注) 特に, 二変数では**二重積分**, 三変数では**三重積分**といわれ, n 変数では n **重積分** (**多重積分**) ともいわれる.
● 重積分においても, ダルブーの定理, 区間加法性 (区間 I を区間 I_1,I_2 に分けるとき $\int_I f=\int_{I_1}f+\int_{I_2}f$), 線形性, 連続関数の可積分性, 振動量による可積分性の評価 ($w_k:=M_k-m_k$ とするとき, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\sum_\Delta w_k|I_k|<\varepsilon$ をみたす分割 Δ があれば可積分), 及び次の定理が成り立つ :

定理 5.1.1'(リーマン和の極限)　$f(\boldsymbol{x})$ は区間 I 上可積分とする. I の分割 Δ の小区間内に任意に $\boldsymbol{x}_k\in I_k$ を取るとき,

$$\int\cdots\int_I f(\boldsymbol{x})dx_1\cdots dx_n=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta f(\boldsymbol{x}_k)|I_k|=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta f(\boldsymbol{x}_k)\Delta x_1^{(j_1)}\cdots\Delta x_n^{(j_n)}\ \left(=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_\Delta f(\boldsymbol{x}_k)\Delta x_i\Delta y_j\right)$$

有界集合上の重積分　$D\subset\mathbb{R}^n$ を有界集合, $f(\boldsymbol{x})$ を D 上の有界関数とし, 次の様に $\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ に拡張する :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}f(\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{x}\in D)\\ 0 & (\boldsymbol{x}\notin D)\end{cases}.\qquad \chi_D(\boldsymbol{x}):=\begin{cases}1 & (\boldsymbol{x}\in D)\\ 0 & (\boldsymbol{x}\notin D)\end{cases}\quad (\chi\text{ はギリシャ文字のカイ (chi)})$$

関数 $\chi_D(\boldsymbol{x})$ を D の**特性関数**, 又は**定義関数**という. ($\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ も $\chi_D(\boldsymbol{x})$ も D の外側では 0.)
D を含む区間 I を任意にとり, $\tilde{f}(\boldsymbol{x})$ が I 上可積分のとき f は D 上**積分可能, 可積分**といい, $\int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}:=\int_I\tilde{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ と定義する. 特に $\int_D 1d\boldsymbol{x}:=\int_I\chi_D(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ であり, これが可積分 $\Leftrightarrow$ D は**可測 (面積確定, 体積確定)**, が成り立つ.

$$\int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}:=\int_I\tilde{f}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},\quad \int_D 1d\boldsymbol{x}:=\int_I\chi_D(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=mD=:|D|\quad \left(\int_D d\boldsymbol{x}\text{ と, 1 を略す}\right)$$

$n=2$ のとき D の面積は $|D|$, $S(D)$ とも表され, $n=3$ のとき D の体積は $|D|$, $v(D)$ とも表される:

$$D\text{ の面積 }|D|=S(D)=\iint_D dxdy:=\iint_I\chi_D dxdy,\qquad D\text{ の体積 }|D|=v(D)=\iiint_D dxdydz:=\iiint_I\chi_D dxdydz$$