微分積分学第一・演習　前期中間試験問題 （B 組, 村山）

[1] 関数 $f(x,y)=xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ の極値を全て求めよ.

[2] (1) 次式を示せ： $(\tan^{-1}y)'=\dfrac{1}{1+y^2}$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ のマクローリン展開 ($x=0$ における無限テイラー展開) を求めよ.

関数 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ について,

(3) $z=f(x,y)$ のグラフ上の点 $(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式を求めよ.

(4) $\triangle=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とするとき ($\triangle$ を 2 変数の**ラプラシアン** (Laplacian) という),

2 階偏導関数 f_{xx}, f_{yy}, および $\triangle f$ $(=f_{xx}+f_{yy})$ を求めよ.

[3] (1) 写像 $\boldsymbol{f}(x,y)={}^t(x\cosh y,\, x\sinh y)$ のヤコビ行列式を求めよ.

ここで, $\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$, $\sinh y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$ (双曲線関数). (答案では $\boldsymbol{f}$ の代わり f でよい.)

C^2 級関数 $z=f(x,y)$ に対し, $(x,y)=(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ $(r>0)$ とおくとき, 次式を示せ：

(2) $|\operatorname{grad} z|^2:=z_x^2+z_y^2=z_r^2+\dfrac{z_\theta^2}{r^2}$ 　　(3) $\triangle z:=z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\dfrac{z_r}{r}+\dfrac{z_{\theta\theta}}{r^2}$

[4] 関数 $f(x,y)$ を次式で定める：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

(1) $f(x,y)$ は連続か. (2) $f(x,y)$ は偏微分可能か. (3) $f(x,y)$ は全微分可能か.
いずれも理由を述べて判定すること.