級数展開・極値

• 以下, 全微分可能を単に「微分可能」又は「**可微分**」という. $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{a}$ は一変数関数の $f(x)$, a も表すとする.

関数 $f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in D)$ が点 $\boldsymbol{a}$ で **(広義の) 極大**であるとは. $\boldsymbol{a}$ のある開近傍 D 上で

$$\boldsymbol{x}\in D,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{a}\implies f(\boldsymbol{x})<f(\boldsymbol{a})\qquad (f(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{a}))$$

をみたすときとする ($f(\boldsymbol{x})$ を D 上に制限したとき, 極大は $\boldsymbol{a}$ でのみ最大値をとる). $f(\boldsymbol{a})$ を **(広義の) 極大値**という. **(広義の) 極小 (値)** も $<$ $(\leqq)$ を $>$ $(\geqq)$ に変えて同様. (広義の) 極大値, 極小値をあわせて **(広義の) 極値**という. また, $f_{x_i}(\boldsymbol{a})=0$ $(i=1,\dots,n)$ $(\Leftrightarrow Jf(\boldsymbol{a})=O)$ となる点 $\boldsymbol{a}$ を**臨界点** (critical point) という.

定理 2.2.1, 4.3.3(極大極小) 関数 $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{a}$ のある**開**近傍 D 上で定義され, $\boldsymbol{a}$ で微分可能とする.
(1) 一変数関数 $f(x)$ が, (i) a で広義の極値を取れば $f'(a)=0$. (ii) (内部) a で最大値 (最小値) を取れば $f'(a)=0$.
(2) (多変数関数) $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a}$ で広義の極値を取れば $\boldsymbol{a}$ は臨界点, 即ち $f_{x_i}(\boldsymbol{a})=0$ $(i=1,\dots,n)$.

証明 (1,i) a で広義の極小とすると, a のある近傍上 $f(a+h)-f(a)\geqq 0$ より

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\begin{cases}\geqq 0 & (h>0)\\ \leqq 0 & (h<0)\end{cases}\implies f'(a)=\lim_{h\to\pm0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\begin{cases}\geqq 0 & (h\to+0)\\ \leqq 0 & (h\to-0)\end{cases}\quad\therefore\ f'(a)=0.$$

広義の極大も同様. 他はこれから出る. (定義域の内部で最大値最小値をとることが重要.)

以下暫くは一変数関数 $f(x)$ を考え, 次の条件 $(*)$ をみたすとする :

$(*)$ $f(x)$ は閉区間 $I=[a,b]$ 上連続で, 内部 (a,b) で微分可能

定理 2.2.2 (ロル (Rolle) の定理) $f(x)$ は $(*)$ 閉区間 $[a,b]$ で連続, 内部 (a,b) で微分可能, かつ $f(a)=f(b)$ のとき, $f'(c)=0$ となる点 $c\in(a,b)$ が存在する. (図)

証明 $f(x)\equiv f(a)$ の時は $f'(x)\equiv 0$ $(x\in(a,b))$ で成立. $f(x)\not\equiv f(a)$ とする. このとき, $f(x)\neq f(a)$ となる x があるので $f(I)$ の最大値, 最小値のどちらかは $f(a)$ でない. その値をとる点を $c\in(a,b)$ とすれば $f'(c)=0$.

定理 2.2.3 (平均値の定理) $f(x)$ は $(*)$ 閉区間 $[a,b]$ で連続, 内部 (a,b) で微分可能なら, ある $c\in(a,b)$ が存在して,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).\quad (\iff f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)).\qquad (図)$$

証明 ロルの定理に持ち込む. $f(a)=f(b)$ ならロルの定理. 上式左辺 $(f(b)-f(a))/(b-a)$ を α とし, $F(x):=f(x)-f(a)-\alpha(x-a)$ とすると, $F(b)=0=F(a)$ より $F'(c)=0$ となる $c\in(a,b)$ があり (ロルの定理), $F'(x)=f'(x)-\alpha$ より $f'(c)=\alpha=(f(b)-f(a))/(b-a)$.

平均値の定理より次の定理が導かれる, :

定理 2.2.4 $f(x)$ は区間 I で微分可能, かつ $f'(x)\equiv 0$ (恒等的に 0) なら $f(x)\equiv k$ ($f(x)$ は定数).

$(\because)$ $a\in I$ とし, $b\in I$ を任意にとると, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ となる c が a と b の間にある (平均値の定理). $f'(c)=0$ より $f(b)-f(a)=0$. b は任意だから $f(x)\equiv f(a)$.

定理 2.2.5 (1) $f(x)$ は $(*)$ $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とするとき,

$f'(x)>0$ $(a<x<b)\implies f(a)<f(b)$, $f'(x)<0$ $(a<x<b)\implies f(a)>f(b)$.

(2) $f(x)$ が区間 I で微分可能のとき, $f'(x)>0$ なら単調増加, $f'(x)<0$ なら単調減少.

$(\because)$ (1) $f'(x)>0$ のとき, $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ (>0) となる c $(a<c<b)$ があるので $f(a)<f(b)$. 他も同様.
(2) I の任意の 2 点 $a<b$ に (1) を適用する.

有限テイラー展開 以下, 関数 $f(x)$ は開区間 I で n 回微分可能とする. 従って. $f(x),f'(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$ は連続.

定理 2.4.1(テイラー (Taylor) の定理) 関数 $f(x)$ は区間 I で n 回微分可能とする. $a,b\in I$ に対し,

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+R_n$$

とおくとき, a と b の間にある c $(\neq a,b)$ で次をみたすものが存在する:

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n\quad\cdots(*)\qquad\Bigl(\text{または } R_n=f^{(n)}(c)\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}(b-a)\quad\cdots(**)\Bigr).$$

($(*)$ の R_n を**ラグランジュ(Lagrange) の剰余項**, $(**)$ の R_n を**コーシーの剰余項**という.)

証明 ロルの定理をつかう為に, $g(x)=f(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k+R_n\frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}$ とおくと $g(a)=f(b)=g(b)$.
$g'(c)=0$ となる c が存在する. $g'(x)$ を計算し, c を代入すると $g'(c)=0$ より $(*)$ を得る :

$$g'(x)=f'(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\Big\{\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k-f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}\Big\}-R_n\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}.\ \Big(\sum_{k=1}^{n-1}\{\ \}=f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}-f'(x).\Big)$$

$$\therefore\ 0=g'(c)=f^{(n)}(c)\frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}-R_n\frac{n(b-c)^{n-1}}{(b-a)^n},\quad \therefore\ R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n\quad\cdots(*).$$

$(**)$ は, $g(x)$ の最後の項を $R_n\dfrac{(b-x)}{(b-a)}$ に置き換えても $g(a)=g(b)=f(b)$ をみたすので, 同様にすれば得られる.

• この定理で, b を x とおくと. $c=a+\theta(x-a)$ $(0<\theta<1)$ $((x-c)=(1-\theta)(x-a))$ と表されるので次を得る:

定理 2.4.2 (有限テイラー展開) $f(x)$ は開区間 I で n 回微分可能, $a\in I$ とすると, 各 $x\in I$ に対し,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n,\ R_n=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\ \Big(\text{又は } R_n=f^{(n)}(a+\theta(x-a))\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{(n-1)!}\Big)$$

をみたす $\theta=\theta(x,n)$ $(0<\theta<1)$ が存在する. (θ は $x,\ n$ によって変わる.)

テイラーの定理は $a=0$ のとき, **マクローリン** (Maclaurin) の定理といわれる.

定理 2.4.3 (有限マクローリン (Maclaurin) 展開) (上で $a=0$ として) $f(x)$ は開区間 I $(\ni 0)$ で n 回微分可能とすると, 各 $x\in I$ に対し, ある $\theta=\theta(x,n)$ $(0<\theta<1)$ が存在して,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n,\quad R_n=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\cdots(*)\quad\Big(\text{又は } R_n=f^{(n)}(\theta x)\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}x^n\cdots(**)\Big).$$

• $f(x)$ が C^∞ 級で, $R_n\to 0$ $(n\to\infty)$ なら $f(x)$ は無限級数に展開出来て ($\Leftrightarrow$ 次の右辺の級数が左辺に収束して),

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

これらを (有限を取って) それぞれ**テイラー展開**, **マクローリン展開**という.

例 (マクローリン展開) ( ) 内は収束域 (=収束する範囲) (*c.f.*, p156) n 次導関数や剰余項とその評価等は補足で.

(1) $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$, (2) $\sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$,

(3) $\cos x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\quad(x\in\mathbb{R})$, (4) $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\quad(-1<x\leqq 1)$,

(5) $(1+x)^\alpha=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}{}_\alpha C_k x^k=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\cdots\quad(|x|<1)$. ${}_\alpha C_n$ は二項係数 ${}_mC_n$ の拡張で,

${}_\alpha C_0:=1,\ {}_\alpha C_1:=\alpha,\ {}_\alpha C_n:=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$ $(\alpha\in\mathbb{R},\ n=0,1,2,\ldots)$ $(\alpha=m\in\mathbb{N},\ m<n\Rightarrow {}_mC_n=0.)$

オイラー (Euler) の公式 e^x の展開式に $x=i\theta$ $(i=\sqrt{-1})$ を代入して実部と虚部に分けると,

$$e^{i\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{2n!}+i\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)=\cos\theta+i\sin\theta.$$

式 $\boldsymbol{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$ を**オイラーの公式**といい, $\boldsymbol{e^{i\pi}=-1}$ (または $\boldsymbol{e^{i\pi}+1=0}$) を**オイラーの等式**という.

二項展開の系 (5) の α に様々な値,$-1,-1/2$ 等, や x に $-x$ や x^2 等を代入すると様々な関数の展開式が得られる.

(1) $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\cdots$. $(\because)$ $\alpha=-1$ とすると ${}_\alpha C_n=\dfrac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}=(-1)^n$.

(2) $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots$. (3) $\dfrac{1}{1+x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. $(\because)$ (1) の x に $-x$ や x^2 を代入.

以下同様に, $\alpha=\pm 1/2$ として ${}_\alpha C_n$ を計算し, x に $-x$ や x^2 等を代入して次を得る:

(4) $\sqrt{1+x}=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n$. (5) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$. (6) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}$.

ここで, $n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{正の偶数})\\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{正の奇数})\end{cases}$, $0!=0!!=(-1)!!:=1$.

一変数関数に関する補遺

定理 2.3.4(ライプニッツの法則 (Leibniz rule)) $f(x)$ と $g(x)$ 開区間 I で m 回微分可能なら, 積 fg もそうで,

$$(fg)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}{}_mC_k f^{(m-k)}g^{(k)}.$$

証明は二項展開と全く同じで, $(fg)'=f'g+fg'$ より帰納的に, ${}_nC_{k-1}+{}_nC_k={}_{n+1}C_k$ 等を用いて得られる.