

多変数関数・写像の連続性と微分

[多変数関数のこれまでの纏めと拡張]

$D \subset \mathbb{R}^n$: 部分集合, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) (= x, (x, y), (x, y, z), \dots) \in D$ (列ベクトルと考えておく.)

(多変数) 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ は, $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) (= f(x), f(x, y), f(x, y, z), \dots)$ と表記される.

$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} (= |x|, \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \dots)$. $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ の間の距離.

極限值: $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \alpha \iff |\mathbf{x} - \mathbf{a}| \rightarrow 0$ のとき $|f(\mathbf{x}) - \alpha| \rightarrow 0$.

(厳密には ε - δ 論法により, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon)$ と定義する.)

連続性: $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a} \in D$ で連続 $\iff \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が $(D$ で) 連続 $\iff f(\mathbf{x})$ は各点 $\mathbf{a} \in D$ で連続.

($\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon)$)

(拡張) 写像 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ は m 個の関数 $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $f(\mathbf{x}) = {}^t(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ と表される.

(ここでは t を用いて列ベクトルと考えることを強調している.)

記号で区別できる様に, 本講義では $\mathbb{R}^m$ 等への写像を太字を用いて $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 等と表すことにする. 即ち,

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = {}^t(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = {}^t(g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), \dots, g_\ell(\mathbf{y}))$ 等, このとき,

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ や連続性も同様に定義される. ($|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}|$ は $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\alpha}$ 間の距離.)

(収束: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}| < \varepsilon)$. 連続性: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \implies |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| < \varepsilon)$)

$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ に対し, $|y_1|, |y_2|, \dots, |y_m| \leq |\mathbf{y}| \leq |y_1| + |y_2| + \dots + |y_m|$ より,

$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\alpha}| \rightarrow 0 \iff \forall i, |f_i(\mathbf{x}) - \alpha_i| \rightarrow 0$ 即ち, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ の収束, 連続性と各成分関数 $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ の収束, 連続性は同値. ($\implies$ は左の, $\impliedby$ は右の不等式による.)

極限值と四則 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\beta}$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$), $s \in \mathbb{R}$ のとき,

(1) $s\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow s\boldsymbol{\alpha}$, (2) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, (3) $\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$, (4) $\mathbf{f}(\mathbf{x})/\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta} \neq 0$)

(拡張) 写像 $\mathbf{f}, \mathbf{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ についても (1), (2) は成分関数の収束から同様に成り立つ. しかし, ベクトルに積, 商はないので (3), (4) は成り立たない. だが, 関数倍と内積については (3) と (2) を用いて成り立つことが分かる.

即ち, 関数 $h(\mathbf{x})$ に対し, $h(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) := {}^t(h(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}), \dots, h(\mathbf{x})f_m(\mathbf{x}))$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ と $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ の内積を

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x})g_1(\mathbf{x}) + \dots + f_m(\mathbf{x})g_m(\mathbf{x})$ ($\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$ も同様) とするとき,

写像の極限值 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\beta}$, $h(\mathbf{x}) \rightarrow s$ ($\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$), $s \in \mathbb{R}$ のとき,

(1) $s\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow s\boldsymbol{\alpha}$, (2) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$, (3) $h(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow s\boldsymbol{\alpha}$, (4) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}$

連続関数の四則演算 関数 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ が (点 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で) 連続, $s \in \mathbb{R}$ ならば, 次の関数も ($\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で) 連続:

(1) $f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})$, (2) $sf(\mathbf{x})$, (3) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$, (4) $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ ((4) では $g(\mathbf{x}) \neq 0$ ($g(\mathbf{a}) \neq 0$)).

連続写像のベクトル演算 写像 $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{x})$ と関数 $h(\mathbf{x})$ が (点 $\mathbf{a}$ で) 連続, $s \in \mathbb{R}$ ならば, 次の写像も ($\mathbf{a}$ で) 連続:

(1) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$, (2) $s\mathbf{f}(\mathbf{x})$, (3) $h(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$, (4) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})$.

合成関数の連続性 1 変数関数 $f(x), g(x)$ が (f は点 a で, g は点 $f(a)$ で) 連続ならば $(g \circ f)(x)$ も (点 a で) 連続.

(拡張) 写像 $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ と関数 $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbf{f}(D) \subset D' \subset \mathbb{R}^m$) については合成関数 $g \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$ が $(g \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = g(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = g(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ で定義できる. 同様に, 写像 $\mathbf{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ との合成写像 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ も定義される. このとき 1 変数関数と全く同様に次の合成写像 (合成関数をふくむ) の連続性が示される.

合成写像の連続性 写像 $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($D \subset \mathbb{R}^n$), $\mathbf{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ ($D' \subset \mathbb{R}^m$) が $\mathbf{f}(D) \subset D'$ をみたすとき,

$\mathbf{f}$ が点 $\mathbf{a} \in D$ で, $\mathbf{g}$ が点 $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in D'$ で連続ならば合成写像 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ も点 $\mathbf{a}$ で連続である. 特に, 連続写像の合成写像は連続である.

極限值非存在の例 (4.1.1) 次の関数の極限值は存在しない: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

この関数を $f(x, y)$ とおく. これが $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ のとき収束するなら $x = 0, y = x$ に沿った極限も同じ値に収束する (はずである). 所が, $\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = 0$ より極限はない.

例 4.1.2 次の関数の極限值を求める: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

この関数 $f(x, y)$ の $x = 0, y = 0$ に沿った極限はいずれも 1. $\therefore$ これが収束するなら 1 に収束するはず.

そこで $|f(x, y) - 1| \rightarrow 0$ かどうかを調べる. $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおくと, $(x, y) \rightarrow (0, 0) \implies r \rightarrow 0$ で,

$|f(x, y) - 1| = \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{2r^3 \cos^3 \theta - r^3 \sin^3 \theta}{r^2} \right| \leq \left| \frac{2r^3 \cos^3 \theta}{r^2} \right| + \left| \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r^2} \right| \leq 2r + r \rightarrow 0 ((x, y) \rightarrow (0, 0))$

より極限值は 1. また, $f(0, 0) := 1$ と定めると $f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続. この様に極座標変換が有効である.

微分・偏微分の纏めと拡張

関数の微分がある点で定義される為には、その点の周り (近傍) で定義されている必要がある。そこで、

近傍, 開集合 : 点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対し, 中心 $\mathbf{a}$, 半径 r の開球体 $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$ を $\mathbf{a}$ の r 近傍という (平面では開円板, 数直線では开区間 $(a-r, a+r)$) (図). $D \subset \mathbb{R}^n$ は $B_r(\mathbf{a}) \subset D$ となる $r (> 0)$ が存在するとき $\mathbf{a}$ の近傍という. また, D は, 任意の点 $\mathbf{a} \in D$ の近傍となるときの $(\mathbb{R}^n)$ の **開集合** という.

($D \subset \mathbb{R}^n$ が開集合 $\iff \forall \mathbf{a} \in D \exists r > 0 (B_r(\mathbf{a}) \subset D)$). 開球体や $\mathbb{R}^n$ は開集合. 开区間は $\mathbb{R}$ の開集合.)

また, 部分集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ の任意の二点が曲線で結べるとき D は**連結**といい, 連結開集合を**領域**という. また, 開集合である近傍を**開近傍**という. なお, 開集合の補集合を**閉集合**という. 以上の用語のもとに,

- 以下, 関数 $f(\mathbf{x})$ や写像 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ は, ある点 $\mathbf{a}$ での微分可能性を考えると $\mathbf{a}$ のある近傍 D で定義されているとし, D 全体で微分可能性を考えると D は $\mathbb{R}^n$ のある領域 (又は開集合) とする.

微分可能性 1 変数関数 $y = f(x)$ が点 $x = a$ で微分可能 $\iff$

$$f(a+h) = f(a) + Ah + R, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |R|/|h| = 0 \quad (\Delta f = A\Delta x + \varepsilon|\Delta x|, |\varepsilon| \rightarrow 0 (|\Delta x| \rightarrow 0)) \text{ をみたす } A \text{ が存在する}$$

この A を微分係数といい, $f'(a)$, $\frac{df(a+h)}{dh}|_{h=0}$ 等と表した.

多変数関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ が点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 点 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ で x_i に関して**偏微分可能**

$\iff x_i$ の関数 $f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$ が $x_i = a_i$ で微分可能

このとき, この微分係数を**偏微分係数**といい, 次の様に表した:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), f_{x_i}(\mathbf{a}) \quad \left(= \frac{df(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)}{dx_i} \Big|_{x_i=a_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i+h, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h} = \frac{df(\mathbf{a}+he_i)}{dh} \Big|_{h=0} \right)$$

領域 D で定義された関数 $f(\mathbf{x})$ が D の各点 $\mathbf{a}$ で偏微分可能のとき, $f(\mathbf{x})$ は D で偏微分可能といい, 関数 f_{x_i} を偏導関数といった.

多変数関数の全微分可能性 点 $\mathbf{a}$ の近傍での $\mathbf{x}$ の増分 $\mathbf{h} = {}^t(h_1, \dots, h_n)$ に対し, 行ベクトル $A = (A_1, \dots, A_n)$ で

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + A\mathbf{h} + R, \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|R|}{|\mathbf{h}|} = 0 \quad (A\mathbf{h} := A_1h_1 + \dots + A_nh_n : \text{行列の積}, R = R(\mathbf{h}))$$

となるものがあるとき, (増分を $\Delta \mathbf{x} = {}^t(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$, $\Delta f = f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$, $\varepsilon = R/|\Delta \mathbf{x}|$ と表すと,

$$\Delta f = A\Delta \mathbf{x} + \varepsilon|\Delta \mathbf{x}|, \quad |\varepsilon| \rightarrow 0 (|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0) \quad (A\Delta \mathbf{x} := A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n)$$

となるものがあるとき,) $f(\mathbf{x})$ は, 点 $\mathbf{a}$ で**全微分可能**といい, D の各点で全微分可能のとき D で**全微分可能**という.

偏導関数の連続性から全微分可能性が導かれる:

定理 4.2.2 $f(\mathbf{x})$ が点 $\mathbf{a}$ のある近傍 D で全変数 $x_1, \dots, x_n$ に関して偏微分可能で, 全偏導関数 $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ が $\mathbf{a}$ で連続ならば, $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で全微分可能である.

(注) $n-1$ 個の偏導関数が連続であれば定理は成り立つ. 特に $f(x, y)$ では f_x, f_y のいずれかが連続であれば良い. (証明は平均値の定理を用いる為ここでは省略する.)

定理 4.2.1, 4.2.3 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ で全微分可能なら $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で連続かつ偏微分可能で, $A = (f_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$.

(証明) $|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| = |A\mathbf{h} + \varepsilon|\mathbf{h}|| \leq |A_1h_1| + \dots + |A_nh_n| + |\varepsilon||\mathbf{h}| \rightarrow 0 + \dots + 0 + 0 \cdot 0 = 0 (|\mathbf{h}| \rightarrow 0)$ より連続. $\mathbf{h} = he_i$ とおけば ($h_j=0 (j \neq i)$), $|\mathbf{h}| = |h|$, $A\mathbf{h} = A_ih$. $f(\mathbf{a}+he_i) - f(\mathbf{a}) = A_ih + \varepsilon|h|$ とおけば $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ より f は $\mathbf{a}$ で偏微分可能で $A_i = \lim_{h \rightarrow 0} (f(\mathbf{a}+he_i) - f(\mathbf{a}))/h = f_{x_i}(\mathbf{a})$.

行列 $A = (f_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$ を f の**ヤコビ行列** (Jacobian matrix), または**関数行列** (functional matrix) といい, 次の様に様々な形で表される: (以下, f が D で全微分可能のとき, f_{x_i} を偏導関数として, $\mathbf{a}$ を $\mathbf{x}$ に変えるか略す)

$$Jf\mathbf{a} = Jf(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})\mathbf{a} = (f_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{a}))$$

従って, f が全微分可能のとき, f の増分は次の様に表される:

$$\Delta f = Jf\Delta \mathbf{x} + \varepsilon|\Delta \mathbf{x}| = f_{x_1}\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}\Delta x_n + \varepsilon|\Delta \mathbf{x}|, \quad |\varepsilon| \rightarrow 0 (|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0)$$

Δf の主要部である $\Delta \mathbf{x}$ に関する一次項 $Jf\Delta \mathbf{x}$ を df と表す. 特に $f(x_i) = x_i$ のとき $\Delta x_i = dx_i$ だから

$$df = Jf\mathbf{a}d\mathbf{x} = f_{x_1}(\mathbf{a})dx_1 + f_{x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \dots + f_{x_n}(\mathbf{a})dx_n \quad (d\mathbf{x} = {}^t(dx_1, \dots, dx_n))$$

df を f の $\mathbf{a}$ における**全微分** (total derivative), **外微分** (exterior derivative), **微分** (differential), **微分形式** (differential form) 等という. また, Jf の転置行列 ${}^tJf = {}^t(f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$ を f の**勾配** (ベクトル) (gradient) といい, **grad** f と表す ($\text{grad } f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$).