

ε - δ 論法による関数の収束・極限値の定義 (数列の収束等に用いられる変種も合わせて ε 論法ともいわれる.)

定義 (関数の極限値) (多変数) 関数 $f(x)$ が点 a で $a \in \mathbb{R}$ に収束して極限値 α をもつとは,

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta (= \delta(\varepsilon)) > 0$ が存在して,

$$(*) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon \quad (「|f(x) - \alpha| < \varepsilon (0 < |x - a| < \delta)」とも表す)$$

をみたすときをいい, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ または, $f(x) \rightarrow \alpha (x \rightarrow a)$ と表す.

(「任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(*)$ をみたす $\delta > 0$ が存在する」ともいう.) これを記号を用いて表せば

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

ここで「 $\forall \sim$ 」は「任意の $\sim$ に対し」,「 $\forall$ 全ての $\sim$ に対し」,「 $\forall$ 各 $\sim$ に対し」を表し (数学では全て同じ意味),

「 $\exists \sim (\dots)$ 」は「 $(\dots)$ をみたす $\sim$ が存在する」を表す. ($\forall$ は A(l) を, $\exists$ は E(xist) を回転した記号)

(注) 「任意の $\varepsilon > 0$ に対し」は, ここでは「いくらでも小さい ε に対し」を表している.

(参考) 「 $(**)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|y - \alpha| < \varepsilon$ 」は, $y = \alpha$ と同値. ($y = \alpha$ なら $(**)$ をみたす. 逆の「 $(**)$ ならば $y = \alpha$ 」は対偶:「 $y \neq \alpha$ なら $\varepsilon = |y - \alpha|/2 (> 0)$ とおくと $|y - \alpha| < \varepsilon$ を満たさない」が成り立つ.

・ ここでは, ε - δ 論法による定義を紹介するが, これを用いた証明は少し例を挙げるにとどめる.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ や $f(x)$ の点 a における連続性, および 1 変数関数に限るが, $f(x)$ の片側極限 $\lim_{x \rightarrow a \pm} f(x) = \alpha$ や, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \alpha$ も同様に ε - δ 論法 (の一種) を用いて定義される. (簡単な為, 記号を用いて紹介する.)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K) \quad (\text{ここでは } K \text{ はいくらでも大きい数を想定})$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < K) \quad (\text{ここでは } -K \text{ はいくらでも大きい数を想定})$$

$$f(x) \text{ が } x = a \text{ で連続 (continuous)} \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (0 < x - a < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (-\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} (x > K \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} (x < K \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon)$$

● 定理等の復習, 補足と拡張

次に挙げる定理は, 一変数関数については数学 III に証明なしに載っている.

定理 (極限値と四則) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$, s が定数のとき, (但し, (4) では $\beta \neq 0$)

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} sf(x) = s\alpha, (2) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta, (3) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta, (4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

略証は, (1) $|sf(x) - s\alpha| = |s||f(x) - \alpha| \rightarrow 0 (x \rightarrow a)$.

$$(2) |(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| = |(f(x) - \alpha) + (g(x) - \beta)| \leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \rightarrow 0 (x \rightarrow a).$$

(3) $g(x) \rightarrow \beta$ より x が a に十分近ければ $|g(x)| \leq B$ となる B がある⁽ⁱ⁾. よって,

$$|f(x)g(x) - \alpha\beta| = |f(x)g(x) - \alpha g(x) + \alpha g(x) - \alpha\beta| \leq |f(x) - \alpha|B + |\alpha||g(x) - \beta| \rightarrow 0 (x \rightarrow a).$$

(4) $g(x) \rightarrow \beta \neq 0$ より x が a に十分近ければ $|\beta|/2 \leq |g(x)| \leq 2|\beta|$ となる⁽ⁱⁱ⁾. よって, $x \rightarrow a$ のとき,

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \frac{f(x)\beta - \alpha g(x)}{g(x)\beta} \right| \leq \left| \frac{f(x)\beta - \alpha\beta}{g(x)\beta} \right| + \left| \frac{\alpha g(x) - \alpha\beta}{g(x)\beta} \right| \leq \left| \frac{2(f(x) - \alpha)\beta}{\beta^2} \right| + \left| \frac{2\alpha(g(x) - \beta)}{\beta^2} \right| \rightarrow 0$$

((i,ii) は $|g(x)|, 1/|g(x)|$ が途中で ∞ に発散していないことを保証している.

(i) $|g(x) - \beta| < \varepsilon \iff \beta - \varepsilon < g(x) < \beta + \varepsilon$ より $|g(x)| \leq \max\{|\beta - \varepsilon|, |\beta + \varepsilon|\} \leq B$ となる B と対応する $\delta > 0$ をとるとき $|x - a| < \delta$ となる x を a に十分近い x とする. $\max(\min)$ は最大 (小) 値を表す.

(ii) $\beta - \varepsilon < g(x) < \beta + \varepsilon$ で $\varepsilon := |\beta|/2 (> 0)$ とすれば $|g(x)| > |\beta|/2$ (β の正負で場合分け). 対応する δ を δ_1 とし, 独立して (i) の B を $B = 2|\beta|$ となる様な ε と, 対応する δ を δ_2 とし, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とした (i) と同様の x .)

だが, 厳密な証明には ε - δ 論法を用いる. 前期 (微分積分学第一) では証明は省略するか, 略証に留めるが, 扱う関数の種類が増えてくると収束するかどうか微妙な場合も出てくるので, 後期 (微分積分学第二) では ε - δ 論法を用いた証明も出てくる予定である. 参考までに, ε - δ 論法を用いた (1) の証明を挙げておくと: $s = 0$ のときは自明.

$s \neq 0$ とする. 任意に $\varepsilon > 0$ を取る (取って固定する). $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ より (上で取った ε に対し, 任意性より ε を $\varepsilon/|s|$ で置き換えて考えてよいので), $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon/|s|$ となる $\delta > 0$ が存在する.

このとき, $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|sf(x) - s\alpha| = |s||f(x) - \alpha| < |s|(\varepsilon/|s|) = \varepsilon$ より (1) が成り立つ.

・ 関数 $f(x)$ が定義域の各点で連続であるとき, $f(x)$ は連続 (関数) であるという.

次の定理は上の定理より ($\alpha = f(a)$, $\beta = g(a)$ とすることにより) 得られる:

定理 (連続関数の四則演算) 関数 $f(x), g(x)$ が (点 $x = a$ で) 連続なら, 次の関数も ($x = a$ で) 連続である.

(1) $f(x) \pm g(x)$, (2) $sf(x)$, (3) $f(x)g(x)$, (4) $f(x)/g(x)$. ($s \in \mathbb{R}$, (4) では $g(x) (g(a)) \neq 0$ とする.)

一変数関数について、

定理 (連続関数の合成関数) 関数 $f(x)$ が点 a で連続、 $g(x)$ が点 $f(a)$ で連続ならば合成関数 $(g \circ f)(x)$ も点 a で連続である. 特に連続関数 $f(x), g(x)$ の合成関数 $(g \circ f)(x)$ は連続である.

(f が多変数関数 $f(x)$ でも同様に成り立つが、 g が多変数関数のときは説明を要するので略す.)

(略証) $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$. $y \rightarrow f(a)$ のとき $g(y) \rightarrow g(f(a))$. $\therefore x \rightarrow a$ のとき $g(f(x)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$.

中間値定理 関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で連続で、 $f(a) \neq f(b)$ ならば、 $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対し $f(c) = m$ となる c ($a < c < b$) が少なくとも1つ存在する. 即ち、 $f(x)$ は (a, b) で $f(a)$ と $f(b)$ の間の値を全てとる. (注:間の値とは、 $f(a) < f(b)$ のときは $f(a) < m < f(b)$, $f(a) > f(b)$ のときは $f(a) > m > f(b)$ のこと.)

系 閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数は、 $f(a)$ と $f(b)$ が異符号ならば方程式 $f(x) = 0$ は (a, b) において解をもつ.

最大値・最小値定理 閉区間 I で連続な関数は I で最大値、最小値をとる.

これらの証明には、 $\mathbb{R}$ の、 $\mathbb{Q}$ との違いを表す、基本的性質である**実数の連続性公理**が用いられる.

実数の連続性公理 「上に有界な単調増加実数列は収束する」と同値ないくつかの命題中の一つを実数の連続性公理という. (公理は性質を定めるものとして無条件に成立を認め、他の命題との同値性を定理とする.)

ここで、実数列 $\{a_n\}$ は、全ての n について $a_n \leq a_{n+1}$ をみたすとき 単調増加といい ($a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$), $a_n \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$) となる実数 M が存在するとき上に有界という. また、収束するとは実数である極限值をもつということである. 正の無限小数 α は、小数第 n 位までとった有限小数を a_n とするときの数列 $\{a_n\}$ (これは単調増加で、上に有界) の極限值としてその存在が保証される.

(有理数列は上に有界で単調増加であっても有理数に収束するとは限らず、一般には実数に収束する.)

感覚的にいうと「実数は切れ目なく存在している」ということになる.

(中間値定理の説明) (図) f は連続で、 I も切れ目がないので $y = f(x)$ のグラフは繋がっている. $f(a) < m < f(b)$ なら直線 $y = m$ と f のグラフは (1 個所以上で) 交わる. 実際の証明は、 $A := \{x \in I \mid f(x) \leq m\}$ の中に “どんどん大きくなっていく” 単調増加列 $\{a_n\}$ ($a_n \in A$) がとれて、その収束先 c が $f(c) = m$ をみたす、というものである. (最大値定理の説明) 閉区間上で考えているのでグラフには両端があつて切れ目がないので ∞ に発散する所はない. 実際の証明は、 $f(a_n)$ が “どんどん大きくなっていく” 数列 $\{a_n\}$ が取れるが、閉区間内にあるので、“部分列” $\{a_{n_k}\}$ で ($k \rightarrow \infty$ のとき) 収束するものがある. その極限値を c とすれば $f(c)$ が最大値になる、というものである.

中間値定理を用いて次の逆関数定理が示される. まず定義を述べる.

関数 $f(x)$ が狭義単調増加 (減少) とは、 $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$) が成り立つときをいい、これらを総称して狭義単調という. (単調増加は $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.)

(連続関数に対する) 逆関数定理 閉区間 $I = [a, b]$ で連続な狭義単調増加関数 $y = f(x)$ には $[f(a), f(b)]$ で定義される f の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在して連続である. 狭義単調減少の場合は定義域を $[f(b), f(a)]$ に代えて同様. また、 $f(x)$ の定義域が一般の区間の場合でも逆関数の定義域を f の像に置き換えることにより同様に成立.

(f が増加のときの略証) 中間値定理により、 $y \in [f(a), f(b)]$ には $y = f(x)$ となる x が存在するが、狭義単調増加なのでその様な x は唯1つしかない. そこで $x = f^{-1}(y)$ と定めると f の逆関数になる. $f^{-1}(y)$ も狭義単調増加で a, b 間の値を全て取るので連続であることが示される.

例 (逆三角関数) $y = \sin x$ は $2n\pi - \pi/2 \leq x \leq 2n\pi + \pi/2$ で狭義単調増加、 $(2n+1)\pi - \pi/2 \leq x \leq (2n+1)\pi + \pi/2$ で狭義単調減少だから、 $y = \sin x$ は定義域を $[2n\pi - \pi/2, 2n\pi + \pi/2]$ や $[(2n+1)\pi - \pi/2, (2n+1)\pi + \pi/2]$ に制限すればそれぞれの区間で連続な逆関数が存在する. その中で、 $y = \sin x$ の定義域を $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限したものの逆関数を逆正弦関数の**主値**といい、 $x = \sin^{-1} y$ 等と表す (値域が $[-\pi/2, \pi/2]$, 定義域は $[-1, 1]$). 他の逆三角関数も以前述べた様に主値を定める. ($\cos^{-1} x$ の値域は $[0, \pi]$, $\tan^{-1} x$ の値域は $\mathbb{R}$.)

冪乗根, 対数関数 指数関数 $y = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) は $\mathbb{R}$ で連続かつ単調増加で像は $(0, \infty)$ なので、 $(0, \infty)$ で連続な逆関数が存在する. それを $\log x$ と表す. また、冪関数 $f(x) = x^n$ ($n = 1, 2, \dots$) は $[0, \infty)$ で連続、狭義単調増加で像は $[0, \infty)$ なので、 $[0, \infty)$ で連続な逆関数が存在する. それを $\sqrt[n]{x}, x^{\frac{1}{n}}$ と表す. $e^{\frac{1}{n} \log x}$ は $(0, \infty)$ で $x^{\frac{1}{n}}$ と等しく、 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{n} \log x} = 0$ である.

● 逆関数は定義域、値域に注意！