

広義積分

ここでは、定義域や関数が有界でない場合の積分を取り扱う。一変数と多変数で定義に多少相違がある。

一変数関数の広義積分 $y=f(x)$ の場合: 半開区間 $[a, b)$ ($a < b \leq \infty$) 上で全ての c ($a < c < b$) について $f(x)$ は $[a, c]$ 上可積分とする. ($c \rightarrow b-0$ のとき $f(x)$ は発散していても良い. 又, $b=\infty$ では $b-0=\infty$ とする.) このとき, 次の右辺が収束すれば, その極限値を左辺で表し, $f(x)$ は $[a, b)$ で**広義積分可能** (又は **(広義) 可積 (分)**) という: (図)

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx \quad (= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx)$$

この様に, 定義域が閉区間でない場合や関数がある場合や関数がある場合に拡張された積分 $\int_a^b f(x) dx$ を**広義積分**という.

$(a, b]$ ($-\infty \leq a < b$) 上でも同様. 開区間 (a, b) 上では, a, b の間に c をとるとき, 広義積分 $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$ が共に存在するならば, (c の取り方によらない) $f(x)$ は (a, b) で**広義積分可能** といい, その和を $\int_a^b f(x) dx$ と表す:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{a' \rightarrow a+0} \int_{a'}^c f(x) dx + \lim_{b' \rightarrow b-0} \int_c^{b'} f(x) dx \quad \left(=: \lim_{a' \rightarrow a+0, b' \rightarrow b-0} \int_{a'}^{b'} f(x) dx \right)$$

閉区間 $[a, b]$ 内の点 c の近傍で $f(x)$ が有界でないときも同様で, (c を**特異点**という) 広義積分 $\int_a^c f(x) dx$, $\int_c^b f(x) dx$ が共に存在するとき $f(x)$ は $[a, b]$ で**広義積分可能** といい, その和を $\int_a^b f(x) dx$ と表す. 一般に区間 I の内部又は端に特異点が (2 個以上) 存在するときも, 幾つかの区間に分けて, それぞれの区間で広義積分可能であるとき, 区間 I で**広義積分可能** といい, 積分は**収束**する, 又は**存在**するともいう. また, 積分が収束しないとき**発散**するという. これらの用語, 記号は関数値の収束, 発散と同様に用い, 例えば $\lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx = \infty$ のとき $\int_a^b f(x) dx = \infty$ と表す.

特に $f \geq 0$ の場合, $\int_a^b f(x) dx < \infty$ は収束 (= 広義可積分) を意味する. これは広義重積分でも同様.

例 4.1 (1) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sin^{-1} x]_{-1+\varepsilon}^0 + \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} [\sin^{-1} x]_0^{1-\varepsilon'} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

$a < b, k \in \mathbb{R}$ とする. (2) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k} = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-k}}{1-k} & (k < 1) \\ \infty & (k \geq 1) \end{cases}.$ (3) $(a > 0) \int_a^\infty \frac{dx}{x^k} = \begin{cases} \frac{a^{1-k}}{k-1} & (k > 1) \\ \infty & (k \leq 1) \end{cases}.$

(4) $\int_a^\infty e^{kx} dx = \begin{cases} \frac{-1}{k} e^{ka} & (k < 0) \\ \infty & (k \geq 0) \end{cases}.$ (5) $\int_{-\infty}^a e^{kx} dx = \begin{cases} \frac{e^{ka}}{k} & (k > 0) \\ \infty & (k \leq 0) \end{cases}.$

収束条件 ここでは簡単の為, $[a, \infty)$ での広義積分について述べる (特異点は含まないとする) が, 他の場合も同様 (例えば $(a, b]$ での広義積分は $x \rightarrow \infty$ を $x \rightarrow a+0$ に変える等). 収束条件は, 連続関数 $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ の $x \rightarrow \infty$ での収束条件になり, 数列や級数, 特に正項級数の収束条件や絶対収束等と同様なものがえられる.

(1) (コーシー (列) の条件) $\int_a^\infty f(x) dx$ が収束 $\iff \int_{b'}^{b''} f(x) dx \rightarrow 0$ ($b', b'' \rightarrow \infty$).

(2) (有界性) $[a, \infty)$ 上 $f(x) \geq 0$ のとき, $\int_a^\infty f(x) dx$ が収束 $\iff \int_a^x f(t) dt$ ($a < x < \infty$) が有界.

絶対収束 $|f(x)|$ がある区間で広義可積分のとき, $f(x)$ はその区間で**絶対可積分** といい, 積分は**絶対収束** するという. $|\int_{b'}^{b''} f(x) dx| \leq \int_{b'}^{b''} |f(x)| dx$ ($\rightarrow 0$ ($b', b'' \rightarrow \infty$)) より絶対収束すれば収束する. 同様に:

定理 3.3.1 $|f(x)| \leq g(x)$, $\int_a^\infty g(x) dx$ が収束 $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ は絶対収束.

定理 3.3.2 $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\int_a^\infty g(x) dx$ が発散 $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ は発散.

例 4.1 と定理 3.3.1 より, 次の例と定理を得る: (以下で, $[F(x)]_a^\infty$ 等は $\lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b$ を意味する.)

例 4.2 $a > 0$ のとき, (1) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bxdx$, (2) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bxdx$ は絶対収束して, (1) $= a/(a^2+b^2)$, (2) $= b/(a^2+b^2)$.

この値は部分積分を用いるか, $e^{ibx} = \cos bx + i \sin bx$, (1) $+ i(2) = \int_0^\infty e^{-ax+ibx} dx = [e^{(-a+ib)x}/(-a+ib)]_0^\infty$ より.

定理 4.2 (1) $(a, b]$ ($[a, b)$) 上で, ある $k < 1$ に対し, $(x-a)^k f(x)$ ($(b-x)^k f(x)$) が有界 $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ は絶対収束.

(2) $[a, \infty)$ 上で, ある $k > 1$ に対し $x^k f(x)$ が有界 $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ は絶対収束.

($\therefore$) (1) $[a, b)$ 上, $|(x-a)^k f(x)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M(x-a)^{-k}$. $\therefore \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M(x-a)^{-k} dx < \infty$. 他も同様.

定理 5.5.1 (ガンマ関数) (1) $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ ($s > 0$) は, $s > 0$ で収束して $\Gamma(s) > 0$.

($\therefore$) $e^{-x} x^{s-1} > 0$ ($0 < x < \infty$) より収束すれば $\Gamma(s) > 0$. $1 > s > 0$ のときは 0 が $f(x) := e^{-x} x^{s-1}$ の特異点.

$x^{1-s} f(x) = e^{-x} < 1$ ($0 < x < \infty$), $1-s < 1$ と定理 4.2(1) より $\int_0^1 f(x) dx$ は収束. $x \rightarrow \infty$ のとき $x^2 f(x) = e^{-x} x^{s+1} \rightarrow 0$

より $x^2 f(x)$ は有界. $\therefore$ 定理 4.2(2) より $\int_1^\infty f(x) dx$ は収束. 合せて $s > 0$ のとき $\int_0^\infty f(x) dx$ は収束.

定理 5.5.2 (ベータ関数) (1) $B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ ($p, q > 0$) は, $p, q > 0$ で収束して $B(p, q) > 0$.

($\therefore$) (1) $f(x) := x^{p-1} (1-x)^{q-1}$ に対し, $p < 1$ 又は $q < 1$ のときが広義積分. $p < 1: x^{1-p} f(x) = (1-x)^{q-1} \leq 2$ ($x \in (0, 1/2]$),

$q < 1: (1-x)^{1-q} f(x) = x^{p-1} \leq 2$ ($x \in [1/2, 1)$) と定理 4.2(1) より $B(p, q)$ は収束.

● 収束しているが絶対収束していない広義積分は**条件収束**するという。

例 4.3 $J := \int_0^\infty (\sin x/x) dx$ は (条件) 収束. $(\because) 0$ は特異点でない. $0 < a < b$ に対し,
 $|\int_a^b (\sin x/x) dx| = |[-\cos x/x]_a^b - \int_a^b (\cos x/x^2) dx| \leq 1/a + 1/b + \int_a^b (1/x^2) dx = 2/a \rightarrow 0 \ (a, b \rightarrow \infty)$ より J は収束.
 $\int_0^{n\pi} |\sin x/x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x/x| dx > \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (|\sin x|/k\pi) dx = (2/\pi) \sum_{k=1}^n 1/k \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$ より
 $\int_0^\infty |\sin x/x| dx$ は ∞ に発散.

例 4.4 $\int_0^1 (1/x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\log x]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} -\log \varepsilon = \infty$ より $\int_0^1 (1/x) dx$ は発散, $\therefore \int_{-1}^1 (1/x) dx$ は存在しないが,
 $\int_{-1}^1 1/x dx = \int_{-1}^0 1/x dx + \int_0^1 1/x dx = \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \log \varepsilon' - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \log \varepsilon$ なので, 極限の取り方を $\varepsilon' = \varepsilon$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1) 1/x dx$
とすれば 0 になる. この値を**コーシーの主値** (principal value) 又は**主値積分**といい, (P) $\int_{-1}^1 1/x dx$ と表す.
 $(\varepsilon' = a\varepsilon \ (a > 0))$ とすれば $\log a$ になり, 任意の値に収束させられる.)

多変数関数の広義積分 $f(\mathbf{x}) \ (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$ の (多) 重積分の場合:

● 以下, 考える有界閉集合は全て**可測**とし, $f(\mathbf{x})$ は $D \subset \mathbb{R}^n$ 上の関数で, 任意の有界閉集合上で**可積分**とする.
 $(f$ は D 上**局所可積分**という.)

$D \subset \mathbb{R}^n$ に対し, 次をみたす有界閉集合の増大列 $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ を D の**近似列**という:

(1) $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D$, (2) D 内の任意の有界閉集合はある D_m に含まれる (これより (3) $\cup_{m=1}^\infty D_m = D$)

● 以下 D は近似列をもつと仮定する.

$f(\mathbf{x})$ に対し, $f^+(\mathbf{x}) := \max\{f(\mathbf{x}), 0\}$, $f^-(\mathbf{x}) := \max\{-f(\mathbf{x}), 0\}$ とおくと $f^\pm \geq 0$, $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.
 $J_m := \int_{D_m} f d\mathbf{x}$, $J_m^\pm := \int_{D_m} f^\pm d\mathbf{x}$ とおくと, $J_m = J_m^+ - J_m^-$, $\int_{D_m} |f| d\mathbf{x} = J_m^+ + J_m^-$. $\{J_m^\pm\}, \{J_m^+ + J_m^-\}$ は増加列 $(\because (1))$.

定義 D の全ての近似列 $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ に対し極限値 $\lim_{m \rightarrow \infty} J_m^\pm = J^\pm < \infty$ が存在して $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ の選び方によらず同じ値になるとき, f は D 上**広義積分可能**, 又は (**広義**) **可積 (分)** といい, $J := J^+ - J^- (= \lim_{m \rightarrow \infty} (J_m^+ - J_m^-) = \lim_{m \rightarrow \infty} J_m)$ を $\int \dots \int_D f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$ ($\iint_D f(x, y) dx dy$, $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$) (略して $\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, $\int_D f d\mathbf{x}$) とかく.

$$\int_D f d\mathbf{x} = \int \dots \int_D f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f^+ d\mathbf{x} - \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f^- d\mathbf{x} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{D_m} f d\mathbf{x}$$

このとき, 広義積分 $\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ は**収束**する, 又は**存在**するともいう.

定理 5.5.6 D 上 $f(\mathbf{x}) \geq 0$ とする. ある近似列 $\{D_m\}$ に対し $\{\int_{D_m} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\}$ が有界なら f は D 上広義可積分.

$(\because) f^+ = f, f^- = 0, J_m = J_m^+, J_m^- = 0$ で, $\{J_m\} := \{\int_{D_m} f d\mathbf{x}\}$ は有界な増加列なので, $\lim J_m =: J < \infty$ (C1). (2) の条件から, 他の近似列 $\{E_k\}$ に対し, $E_k \subset D_{m(k)}$ となる $m(k)$ があるので $J'_k := \int_{E_k} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq J_{m(k)} \leq J$. $\{J'_k\}$ も有界な増加列なので収束し, $J' := \lim J'_k \leq J$. J_m と J'_k を逆にして $J \leq J'$ を得るので $J' = J$. つまり極限値は近似列の取り方によらない.

定理 5.5.5 $|f| \leq g$ をみたす広義可積分関数 g が存在すれば f は広義可積分. 特に $|f|$ が広義可積分なら f もそう.
 $(\because) J_m^\pm \leq J_m^+ + J_m^- = \int_{D_m} |f| d\mathbf{x} \leq \int_{D_m} g d\mathbf{x} \leq \int_D g d\mathbf{x} < \infty$ と前定理による.

● $\int_D f d\mathbf{x}$ が収束 $\Rightarrow \int_D |f| d\mathbf{x} := \lim \int_{D_m} |f| d\mathbf{x} = \lim (J_m^+ + J_m^-) = J^+ + J^- < \infty$ より $\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ は絶対収束.

即ち, 広義重積分では 収束 $\Leftrightarrow$ 絶対収束. また, ある近似列 $\{D_m\}$ に対し $\{J_m^\pm\}$ が収束すれば f は広義可積分.)

(注) $\{D_m\}_{m=1}^\infty$ の選び方によらず $J = \lim J_m = \lim \int_{D_m} f d\mathbf{x}$ が収束して 同じ値になるとき (=教科書の広義積分の定義) $\{J_m^\pm\}$ は収束 $\therefore \int_D f d\mathbf{x}$ は広義可積分, も示せる, つまり, 2つの広義積分の定義は同値. 但し, ここの広義可積分の定義では 定理 5.5.6 により, ある $\{D_m\}$ について $\{J_m^\pm\}$ が収束すれば良いが, 教科書の定義では「全ての $\{D_m\}$ について」は外せない.

定理 5.5.7 $\int_a^\infty |f(x)| dx, \int_b^\infty |g(y)| dy < \infty \Rightarrow D := [a, \infty) \times [b, \infty)$ 上 $f(x)g(y)$ は広義可積分で,

$$(*) \quad \iint_D f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^\infty f(x) dx\right) \left(\int_b^\infty g(y) dy\right).$$

$(\because) D_m := [a, a+m] \times [b, b+m]$ とすれば $\iint_{D_m} |f(x)g(y)| dx dy = \left(\int_a^{a+m} |f(x)| dx\right) \left(\int_b^{b+m} |g(y)| dy\right) \leq \left(\int_a^\infty |f(x)| dx\right) \left(\int_b^\infty |g(y)| dy\right)$
より (*) の左辺は絶対収束し, 左辺 $= \lim \iint_{D_m} f(x)g(y) dx dy = \lim \left(\int_a^{a+m} f(x) dx\right) \left(\int_b^{b+m} g(y) dy\right) =$ 右辺.

(注) この定理は, $[a, \infty) \times [b, \infty)$ を $(a, b) \times (c, d)$ 上の広義積分等に置き換えても全く同様に成り立つ.

例 5.2.3 $J = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2. \therefore \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

$(\because) D = [0, \infty) \times [0, \infty), D_a = \{(x, y) \in D \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とおき, $J' := \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ を考える. 極座標変換して,
 $e^{-(x^2+y^2)} dx dy = e^{-r^2} r dr d\theta = e^{-r^2} dr^2 d\theta/2. J'_a := \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a e^{-r^2} dr^2/2 = (\pi/4)(1-e^{-a^2}).$
 $\therefore J' = \lim_{a \rightarrow \infty} J'_a = \lim_{a \rightarrow \infty} (\pi/4)(1-e^{-a^2}) = \pi/4.$ 一方, $(\int_1^\infty e^{-x^2} dx \leq \int_1^\infty 2xe^{-x^2} dx = [-e^{-x^2}]_1^\infty < \infty$ より $J < \infty$ で)
 $J' = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[0, n] \times [0, n]} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx\right) \left(\int_0^n e^{-y^2} dy\right) = J^2. \therefore J = \sqrt{J'} = \sqrt{\pi}/2.$