

## 可測集合上の重積分の性質

一般に、集合  $X, Y$  に対し、 $\{x \in X | x \in X, x \notin Y\}$  を  $X$  と  $Y$  の**差集合**といい、 $X-Y$  や  $X \setminus Y$  と表す。(図)  $X, Y \subset Z$  のときは、 $Y$  の補集合  $Y^c$  と  $X$  の共通部分  $X \cap Y^c = X \setminus Y$  である。

$D, D' \subset \mathbb{R}^n$  に対し、次が成り立つ： $\chi_{D \cap D'} = \chi_D \chi_{D'}$ ,  $\chi_{D \cup D'} = \chi_D + \chi_{D'} - \chi_{D \cap D'}$ ,  $\chi_{D \setminus D'} = \chi_D - \chi_{D \cap D'}$ .

区間上の可積分関数の和、差、積も可積分なので(上を用いて)次が成り立つ：

(1) 可測集合  $D_1, D_2$  の和  $D_1 \cup D_2$ , 共通部分  $D_1 \cap D_2$ , 差  $D_1 \setminus D_2$  は可測で、 $f$  が  $D_1, D_2$  上可積分なら、

$$(\int_{D_1 \cup D_2} + \int_{D_1 \cap D_2}) f d\mathbf{x} = (\int_{D_1} + \int_{D_2}) f d\mathbf{x}. \text{ 特に } D_1 \cap D_2 \text{ が測度 } 0 \text{ なら } \int_{D_1 \cup D_2} f d\mathbf{x} = (\int_{D_1} + \int_{D_2}) f d\mathbf{x}.$$

(2)  $E$  が測度 0 の集合 ( $mE=0$ ) なら  $E$  上の有界関数  $f$  は可積分で、 $\int_E f d\mathbf{x} = 0$ .

(3) **線形性**  $f, g$  が  $D$  上可積分なら  $\alpha f + \beta g$  ( $f, g$ ) も可積分で、 $\int_D (\alpha f + \beta g) d\mathbf{x} = \alpha \int_D f d\mathbf{x} + \beta \int_D g d\mathbf{x}$ .

(4)(**不等式**)  $f, g$  が  $D$  上可積分で、 $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in D$ ) なら  $\int_D f d\mathbf{x} \leq \int_D g d\mathbf{x}$ .

特に、( $|f|$  も可積分で、)  $\int_D f d\mathbf{x} \leq \int_D |f| d\mathbf{x}$ ,  $|\int_D (f+g) d\mathbf{x}| \leq \int_D |f+g| d\mathbf{x} \leq \int_D |f| d\mathbf{x} + \int_D |g| d\mathbf{x}$ .

(更に、閉区間  $I$  上  $f, g$  が連続で  $\int_I f d\mathbf{x} = \int_I g d\mathbf{x}$  なら  $f=g$ , 特に  $f \geq 0 \Rightarrow \int_I f d\mathbf{x} \geq 0$  で、 $=$  なら  $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ .)

(5) **積分の平均値定理**  $\inf\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\} |D| \leq \int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \sup\{f(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in D\} |D|$ .

**定理 3.4.1, 5.2.1'** 可測集合  $D$  上の有界連続関数  $f(\mathbf{x})$  は可積分である。

この証明にも**一様連続性**と有界性  $|f(\mathbf{x})| \leq K$  を用いる。(  $D$  が有界閉集合なら連続性から有界性が出る.)

**証明**  $D=I$  (有界閉区間) のとき:  $\forall \varepsilon > 0$  に対し上の  $\delta = \delta(\varepsilon/|I|)$  を取れば、 $|\Delta| < \delta/\sqrt{d}$  なる任意の分割  $\Delta = \{I_k\}$  に対し  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta$ ,  $\therefore |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| \leq \omega_k \leq \varepsilon/|I|$  だから  $\sum_k \omega_k |I_k| \leq (\varepsilon/|I|) \sum_k |I_k| = \varepsilon$ . 一般の場合:  $D \subset I$  なる区間とその十分細かい分割  $\Delta = \{I_k\}$  をとれば  $I_k \subset D$  なる閉区間  $I_k$  上  $f$  は一様連続だから  $\sum_{I_k \subset D} \omega_k |I_k| < \varepsilon/2$ ,  $D$  と交わる残りの  $I_\ell$  の測度の和  $\sum_\ell |I_\ell|$  が十分小さく出来るから  $\sum_\ell \omega_\ell |I_\ell| \leq K \sum_\ell |I_\ell| < \varepsilon/2$ .  $\therefore \sum_k \omega_k |I_k| < \varepsilon$ .

(注 1) ルベーク積分では有界な閉集合、開集合は可測であることが知られている。

(注 2) 測度 0 の集合  $E$  を除いた  $D \setminus E := \{\mathbf{x} \in D | \mathbf{x} \notin E\}$  上の有界連続関数  $f$  は可積分で、 $\int_D f d\mathbf{x} = \int_{D \setminus E} f d\mathbf{x}$ .

特に  $I = [a, b]$  上有限個の点を除いて連続な有界関数は可積分。

$I$  のある分割  $\Delta = \{I_k\}$  に対し、各内部  $\overset{\circ}{I}_k$  上一定 ( $c_k$ ) である関数  $\varphi$  (**階段関数**という) は可積分で  $\int_I \varphi d\mathbf{x} = \sum_k c_k |I_k|$ .

**例** 平面  $\mathbb{R}^2$  上で有限個の  $C^1$  級曲線によって囲まれた有界領域  $D$  は面積確定 (=可測) である。

**累次積分** (iterated integral) 定義から直接重積分の値は困難なので 1 変数の積分の繰り返し (累次積分という) に帰着する方法を与える。ここでは簡単の為、二変数の重積分について説明する。

**単純な領域** 次の様に、上下、又は左右が連続関数  $g_1(x), g_2(x), h_1(y), h_2(y)$  で区切られる領域を**単純な領域**という：

$$D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}, \quad D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\} \quad (\text{図})$$

( $D_x$  では、 $I = I_x = [a, b]$  上で  $g_1(x), g_2(x)$  は連続、 $D_y$  では、 $I = I_y = [c, d]$  上で  $h_1(y), h_2(y)$  は連続とする。

$D_x$  の左右は  $x = a, x = b$  で区切られ、 $D_y$  の上下は  $y = c, y = d$  で区切られている。)

$f(x, y)$  は  $D = D_x$  上で連続とする。  $F(x) := \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$  と、 $J = \int_a^b F(x) dx$  を考え、 $J$  を**累次積分**という：

$$J = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

(注) 通常、右辺の様に表し、 $\iint f dx dy$  を外側の  $dy$  から順に積分していると考えている。多重累次積分も、

$$\int_{D^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{D^{n-1}} dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_{D^1} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \text{ と帰納的に計算する。}$$

**例 1**  $\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2 + 1) dy = \int_0^1 [x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y]_{y=x}^{y=2x} dx = \int_0^1 \{2x^3 + \frac{8}{3} x^3 + 2x - (x^3 + \frac{1}{3} x^3 + x)\} dx = 4/3$ .

**例 2**  $\int_1^2 dy \int_0^{y^2} (x/y) dx = \int_1^2 [x^2/2y]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_1^2 (y^3/2) dy = [y^4/8]_1^2 = 15/8$ .

**例 3**  $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \int_0^{x+y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} [z^2/2]_0^{x+y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{x+1} (x+y)^2 dy = \frac{1}{6} \int_0^1 [(x+y)^3]_0^{x+1} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 \{(2x+1)^3 - x^3\} dx = 13/8$ .

**定理 5.1.2(累次積分)**  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  を  $I = [a, b]$  上の連続関数  $g_1(x), g_2(x)$  で区切られた単純な領域とし、 $f(x, y)$  は  $D$  の内部で有界連続とする。このとき、

(1)  $D$  は面積確定で、 $|D| = S(D) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx$ .

(2)  $F(x) := \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$  は  $I$  上連続で、 (3)  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$ .

注 同様に  $D = D_y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  のときは  $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$

この系として,

**定理 5.1.3' (積分の順序交換)** 領域  $D$  が連続関数  $g_1(x), g_2(x), h_1(y), h_2(y)$  により  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  と表せるとき,  $f(x, y)$  が  $D$  上連続ならば

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

**5.1.2 の証明** (1) は積分と面積の定義による. (2):  $D$  上  $|f(x, y)| \leq K$  とし,  $e \in I$  での連続性を示す.

$g_1(e) = g_2(e)$  の場合:  $|F(x) - F(e)| \leq \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} |f(x, y) - f(e, y)| dy \leq \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} K dy = K |g_2(x) - g_1(x)| \rightarrow 0 = F(e) \quad (x \rightarrow e)$ .

$g_1(e) \neq g_2(e)$  の場合: 任意に  $\varepsilon > 0$  をとる. 適当な  $\delta > 0$  をとると  $|x - e| < \delta \Rightarrow |g_i(x) - g_i(e)| < \varepsilon \quad (i=1, 2)$  とできる.

$D$  を含む区間 (長方形)  $I_{xy} = [a, b] \times [c, d]$  をとる.  $[g_1(e), g_2(e)]$  を少し縮めて  $[y_1, y_2] := [g_1(e) + \varepsilon, g_2(e) - \varepsilon]$  とする

と, (図)  $f(x, y)$  の  $[e - \delta, e + \delta] \times [y_1, y_2]$  における一様連続性により  $e$  に十分近い  $x$  に対し  $|f(x, y) - f(e, y)| < \varepsilon$  か

つ  $(\int_c^{y_1} + \int_{y_2}^d) |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(e, y)| dy = (\int_{g_1(e) - \varepsilon}^{g_1(e) + \varepsilon} + \int_{g_2(e) - \varepsilon}^{g_2(e) + \varepsilon}) |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(e, y)| dy \leq (\int_{g_1(e) - \varepsilon}^{g_1(e) + \varepsilon} + \int_{g_2(e) - \varepsilon}^{g_2(e) + \varepsilon}) 2K dy \leq 8K\varepsilon$ ,  
 $\int_{y_1}^{y_2} |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(e, y)| dy \leq \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon dy \leq \int_c^d \varepsilon dy = \varepsilon |d - c|$  より

$$|F(x) - F(e)| \leq (\int_c^{y_1} + \int_{y_1}^{y_2} + \int_{y_2}^d) |\tilde{f}(x, y) - \tilde{f}(e, y)| dy \leq 8K\varepsilon + \varepsilon |d - c| \quad (\varepsilon \text{ の定数倍})$$

よって  $x \rightarrow e$  のとき  $F(x) \rightarrow F(e)$ .

(3)  $I_{xy} = [a, b] \times [c, d]$  の分割  $\Delta$  を  $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ ,  $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  とすると, 任意の  $(\alpha_i, y) \in I_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  に対し,  $m_{ij} := \inf\{\tilde{f}(x, y) \mid (x, y) \in I_{ij}\} \leq \tilde{f}(\alpha_i, y) \leq M_{ij} := \sup\{\tilde{f}(x, y) \mid (x, y) \in I_{ij}\}$  より  $m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} \tilde{f}(\alpha_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j$ . また,  $\int_c^d \tilde{f}(\alpha_i, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(\alpha_i, y) dy =: F(\alpha_i)$  より

$$s[f, \Delta] = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta y_j \right) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m F(\alpha_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta y_j \right) \Delta x_i = S[f, \Delta].$$

$|\Delta| \rightarrow 0$  のとき, 左右辺は  $\iint_D f(x, y) dx dy$  に収束し, 中辺は  $\int_a^b F(x) dx$  に収束するので (3) が成り立つ.

**例題 5.1.1** 次の積分を計算する: (積分領域を図示するとよい)

(1)  $\iint_D (2x - y) dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$  (図)

(2)  $\iint_D x^2 y dx dy$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ ,  $a > 0$  (図)

解答例: (1)  $\iint_D (2x - y) dx dy = \int_0^1 dx \int_1^2 (2x - y) dy = \int_0^1 \left[ 2xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \left( 2x - \frac{3}{2} \right) dx = -\frac{1}{2}$ .

(2)  $\iint_D x^2 y dx dy = \int_{-a}^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left[ x^2 y^2 \right]_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a x^2 (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{a^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-a}^a = \frac{2a^5}{15}$ .

微分と積分の順序交換については次が成り立つ:

**定理 5.1.4 (微分と積分の順序交換)**  $D = [a, b] \times [c, d] := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  上  $f(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  が連続ならば次式が成り立つ:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$$

**証明**  $G(y) := \int_a^b f_y(x, y) dx$  とおく.  $y \in [c, d]$  に対し, 次の積分は順序交換をすると,

$$\int_c^y G(t) dt = \int_a^b dx \int_c^y f_y(x, t) dt = \int_a^b \left[ f(x, t) \right]_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, c) dx$$

両辺を  $y$  で微分すると,

$$\text{左辺} = G(y) := \int_a^b f_y(x, y) dx = \text{右辺} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx$$