多変数関数のテイラー展開 $f(\boldsymbol{x})$ の 点 $\boldsymbol{a}$ における増分 $\boldsymbol{h}=(h_1,\dots,h_n)$ 方向の微分は, $g(t):=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t)$ として,

$$(*)\quad g'(t)=\frac{df(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t)}{dt}=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t)\frac{d(a_i+h_it)}{dt}=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t)=:\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{h})$$

偏微分作用素 $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)f(\boldsymbol{a}):=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}),\quad \Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^m f(\boldsymbol{a}):=\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^{m-1}f(\boldsymbol{a})$

と定め, **偏微分作用素**という. $f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$ のとき, $\boldsymbol{h}=(h,k)$ とすると, (右式を多項係数を用いて展開すると,)

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^m f(\boldsymbol{a})=\sum_{j=0}^m {}_mC_jh^{m-j}k^j\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}(\boldsymbol{a}),\ \Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^m f(\boldsymbol{a})=\sum_{j_1+\cdots+j_n=m}\frac{m!}{j_1!\cdots j_n!}h_1^{j_1}\cdots h_n^{j_n}\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}(\boldsymbol{a})$$

(この様に展開してから $(h,k)=(x-a,\ y-b),\ h_i=x_i-a_i$ 等を代入する.)

定理 4.3.2 (多変数のテイラーの定理) $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{a}$ の近傍 D で C^r 級 $(r\geqq1)$ とし, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ を結ぶ線分 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t\,|\,0\leqq t\leqq1\}$ は D に含まれているとする. このとき次をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在する: (2 変数のときは $\boldsymbol{h}=(h,k)$ とする)

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^k f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{r!}\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^r f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h}).$$

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)f(\boldsymbol{a})+\cdots+\frac{1}{(r-1)!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^{r-1}f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{r!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^r f(a+\theta h,b+\theta k).$$

証明 $g(t):=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}t)$ にテイラーの定理を用いると θ が存在して, $\displaystyle g(t)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k+\frac{g^{(r)}(\theta t)}{r!}t^r.$

$\displaystyle g(1)=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}+\frac{g^{(r)}(\theta)}{r!}.$ ここで $\displaystyle g^{(k)}(0)=\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^k f(\boldsymbol{a}),\ g^{(r)}(\theta)=\Big(\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)^r f(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$ より出る.

注 $r\geqq2$ のとき, $\boldsymbol{h}$ の 2 次の項は $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n h_ih_jf_{x_ix_j}$ なので, n 次対称行列 $H(f)_{\boldsymbol{a}}=H(f)(\boldsymbol{a}):=(f_{x_ix_j}(\boldsymbol{a}))$ を用いて,

$$\sum_{i,j=1}^n h_ih_jf_{x_ix_j}=(h_1,\dots,h_n)(f_{x_ix_j})\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{h}H(f)\boldsymbol{h}$$

と表せる. (Hf を f の **ヘッセ行列, ヘッシアン** (Hessian) という. また, 同次 2 次式を**二次形式**という.)

極値 一変数関数 $f(x)$ のとき a で極値を取れば $f'(a)=0$. このとき, $\Delta f=\frac12 f''(a)h^2+R_3,\ R_3/|h|^2\to0\ (h\to0)$.
(0) $f''(a)=0$ なら h の高次項を調べる. $f''(a)\neq0$ のとき, 高次項 R_3 を無視できる位十分小さい h に対し,
$\Delta f\fallingdotseq\frac12 f''(a)h^2$, (1) $f''(a)>0\Rightarrow\Delta f\sim h^2$ より極小, (2) $f''(a)<0\Rightarrow\Delta f\sim-h^2$ より極大
($|f''(a)|$ は極大極小には影響しないので, 2 次の係数の符号を変えていないことを $\sim$ で表している).
多変数でも同様に, $\boldsymbol{a}$ が f の極値ならば $Jf(\boldsymbol{a})=O$ なので 2 次までの展開は, (十分小さい $|\boldsymbol{h}|$ に対し,)

$$\Delta f:=f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})=\tfrac12{}^t\boldsymbol{h}H(f)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h}+R_3\sim{}^t\boldsymbol{h}H(f)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h}$$

線形代数の二次形式の標準形の項で, ${}^t\boldsymbol{h}H(f)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h}$ は, $\boldsymbol{h}$ をある直交行列 P $(P^{-1}={}^tP)$ により $\boldsymbol{h}=P\boldsymbol{q}$ と変換して,

$$(*)\quad {}^t\boldsymbol{h}H(f)_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{h}={}^t\boldsymbol{q}\,{}^tPH(f)_{\boldsymbol{a}}P\boldsymbol{q}=\alpha_1q_1^2+\cdots+\alpha_nq_n^2,\quad {}^tPH(f)_{\boldsymbol{a}}P=P^{-1}H(f)_{\boldsymbol{a}}P=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$$

($\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ は $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ を対角成分とする対角行列) と表され, 正則行列 P でこの様に変換しても, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 中の正, 負, 0 の個数は変わらないことが示される. (例えば平方完成により変換しても良い.)
$H(f)_{\boldsymbol{a}}\neq O$ のとき, $(*)$ は α_i が全て正なら極小, 全て負なら極大, その他は極値でない.
$\det H(f)_{\boldsymbol{a}}=\det P^{-1}H(f)_{\boldsymbol{a}}P=\alpha_1\cdots\alpha_n,\ \mathrm{tr}\,H(f)_{\boldsymbol{a}}=\mathrm{tr}\,P^{-1}H(f)_{\boldsymbol{a}}P=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ (tr は対角成分の和)
なので n=2 のときは, $\alpha_1,\alpha_2>0$, 即ち, $\det H(f)_{\boldsymbol{a}}>0$ かつ $\mathrm{tr}\,H(f)_{\boldsymbol{a}}>0$ $\therefore f_{xx}(\boldsymbol{a})>0$ のとき極小,
$\alpha_1,\alpha_2<0$, $\therefore$ $\det H(f)_{\boldsymbol{a}}>0,\ f_{xx}(\boldsymbol{a})<0$ のとき極大, その他は極値でない. このことを利用して次が成り立つ:

定理 4.3.4 $f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$ が C^2 級で, 点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ が臨界点 $(f_x(\boldsymbol{a})=f_y(\boldsymbol{a})=0)$ とする.
$D:=\det H(f)_{\boldsymbol{a}}=f_{xx}(\boldsymbol{a})f_{yy}(\boldsymbol{a})-(f_{xy}(\boldsymbol{a}))^2$ とするとき,
(1) $D>0$ のとき, (i) $f_{xx}(\boldsymbol{a})>0\Rightarrow f$ は $\boldsymbol{a}$ で極小値をとり, (ii) $f_{xx}(\boldsymbol{a})<0\Rightarrow f$ は $\boldsymbol{a}$ で極大値をとる.
(2) $D<0$ のとき, f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない. ($D=0$ のときは高次項も含めて調べる必要がある.)

証明 2 次のテイラー展開において, $Jf(\boldsymbol{a})$=0 より, $|\boldsymbol{h}|$ が十分小さいとき, $\Delta f=\frac12{}^t\boldsymbol{h}H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}$ を平方完成により変数変換する: $\Delta f=\frac12{}^t\boldsymbol{h}H(f)(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})\boldsymbol{h}=\frac12(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$ より, $A':=f_{xx}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$, $B':=f_{xy}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$, $C':=f_{yy}(\boldsymbol{a}+\theta\boldsymbol{h})$, $D':=A'C'-B'^2$ (θ=0 のとき A,B,C) とおくと, $f_{x_ix_j}$ の連続性より, A,B,C,D 中 0 でないものは, $|\boldsymbol{h}|$ を十分小にして A',B',C',D' と同符号と出来る. ($\boldsymbol{h}=(h,k)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$.)
(1): $D>0$ の場合: $AC=0\Rightarrow D=-B^2\leqq0$ なので, $A,C\neq0$. $\therefore A',C',D'\neq0$ (とできる).

$$(*)\quad 2\Delta f=A'h^2+2B'hk+C'k^2=A'(h+(B'/A')k)^2+((A'C'-B'^2)/A')k^2=A'(h+(B'/A')k)^2+(D'/A')k^2$$

$\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0}$ なら $A'\sim A=f_{xx}(\boldsymbol{a})>0$ のとき $(*)>0$ より極小, $A'\sim A=f_{xx}(\boldsymbol{a})<0$ のとき $(*)<0$ より極大.

(2) $D'{\sim}D{<}0$ の場合： $A'{\sim}A{\neq}0$ のとき, $(*)$ の右辺の, 第 1 項と第 2 項は異符号より正負どちらの値も取れるので $\boldsymbol{a}$ は極値でない. $A{=}0, C{\neq}0$ なら A',C' を入れ替えて同様. $A{=}C{=}0$ なら $0{\neq}B{\sim}B'$, $\Delta f{=}B'hk$ より極値でない.

例 4.3.1 $f(x,y) = 1 - 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 3y$ の極値を求める.

解答 まず臨界点を求める： 連立方程式 $f_x = -4x - y + 2 = 0,\ f_y = -x - 2y - 3 = 0$ を解くと $(x,y) = (1,-2)$. 次に $(1,-2)$ における f_{xx} と $\det Hf$ を計算する：$f_{xx} = -4,\ f_{xy} = -1,\ f_{yy} = -2$ より $\det Hf = 8 - 1 = 7 > 0$. $\therefore \det Hf(1,-2) > 0,\ f_{xx}(1,-2) < 0$ より f は $(1,-2)$ で極大値 $f(-1,2) = 5$ をとる.

注 3 変数以上の場合も $\det Jf(\boldsymbol{a}) \neq 0$ のときは同様な方法で極値判定できる. その場合は平方完成により 2 乗の項の係数の符号を求めるか, $Hf_{\boldsymbol{a}}$ の小行列式を用いた判定法が知られている. (線形代数の教科書参照)

逆関数定理・陰関数定理・条件付き極値

逆写像 以下, 写像 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ は C^r 級 $(r \geqq 1)$ とする.

補題 C^1 級写像 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$ に逆写像 $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{f}(D) \to D$ があれば $m = n$, かつ $J\boldsymbol{g} = (J\boldsymbol{f})^{-1}$ (逆行列).

証明 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ より 2 式の両辺のヤコビ行列を考えると, $J\boldsymbol{g}J\boldsymbol{f} = J(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}) = E_n,\ J\boldsymbol{f}J\boldsymbol{g} = E_m$ (E_k は k 次単位行列). このとき, (例えば階数を考えると) $m = n$ でなければならない. このとき $J\boldsymbol{g} = (J\boldsymbol{f})^{-1}$.

即ち, $\boldsymbol{f}$ が逆写像をもつ為には定義域と値域の次元が一致している必要がある, このとき, $\det J\boldsymbol{f}$ の各成分関数は連続で, 行列式は成分の多項式なので $\det J\boldsymbol{f}$ も連続. 従って, ある点 $\boldsymbol{a}$ で $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ なら $\boldsymbol{a}$ のある近傍で $\det J\boldsymbol{f} \neq 0$, $\therefore J\boldsymbol{f}$ は正則となる. また, $(J\boldsymbol{f})^{-1}$ は $J\boldsymbol{f}$ の余因子行列/行列式で与えられるので, $J\boldsymbol{g} = (J\boldsymbol{f})^{-1}$ は連続, 即ち, $\boldsymbol{f}$ に逆写像 $\boldsymbol{g}$ があれば C^1 級になる. 逆にこれが成り立つとき逆写像が存在することが示されるが, 現時点では証明を説明する事も困難なので定理の紹介に留める.

(多変数の) 逆関数定理 (逆写像定理) 写像 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ のある近傍上で定義された $\mathbb{R}^n$ への C^1 級写像とする. このとき, $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ が正則ならば, $\boldsymbol{a}$ の開近傍 $D \subset \mathbb{R}^n$ が存在して, $D' = \boldsymbol{f}(D)$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ の開近傍であり, 逆写像 $\boldsymbol{g}: D' \to D$ が存在して, D' 上 C^1 級であり, $J\boldsymbol{g} = (J\boldsymbol{f})^{-1}$ をみたす. ($\boldsymbol{g}$ は $\boldsymbol{f}$ の**逆関数**とも言われる.)

系 上の定理において $\boldsymbol{f}$ が C^r 級 $(r = 1, 2, \ldots, \infty)$ ならば逆写像 $\boldsymbol{g}$ も C^r 級である.

(略証) $(J\boldsymbol{f})^{-1}(\boldsymbol{x})$ は $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の「余因子行列/行列式」だから C^{r-1} 級. $J\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = (J\boldsymbol{f})^{-1}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))$ なので帰納的に, $\boldsymbol{g}$ が C^1 級 $\Rightarrow J\boldsymbol{g}$ が C^1 級 $\Rightarrow \boldsymbol{g}$ が C^2 級 $\Rightarrow \cdots \Rightarrow J\boldsymbol{g}$ が C^{r-1} 級 $\Rightarrow \boldsymbol{g}$ が C^r 級となる.

陰関数 $y = f(x)$ は $F(x,y) := f(x) - y$ とおくと $F(x,y) = 0$ と表されるが, 一般に 2 つの変数 x, y の間に $F(x,y) = 0$ という関係があるとき, (y の方程式と考えて解くことにより) y を x の関数 $y = f(x)$ とみなせることが多い. このとき $F(x, f(x)) = 0$ が成り立っている. この $f(x)$ を $F(x,y) = 0$ の定める**陰関数** (implicit function) という. ここで, x は多変数 $\boldsymbol{x}$ と考えてもよい.

次の陰関数定理は $F(\boldsymbol{x}, y)$ が C^r 級なら「局所的に」陰関数が存在することを示すもので, 逆関数定理の系である.

陰関数定理 (定理 4.4.1) $(\boldsymbol{a}, b) = (a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$ の近傍で定義された C^r 級関数 $(r \geqq 1)$ $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y)$ が $F(\boldsymbol{a}, b) = 0$, $F_y(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$ ならば, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ のある近傍 U と C^r 級 (陰) 関数 $f: U \to \mathbb{R}$ $(y = f(\boldsymbol{x}))$ が唯 1 つ存在して次が成り立つ：

$$f(\boldsymbol{a}) = b,\ F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0\ (\boldsymbol{x} \in U), \quad F_{x_i}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) + F_y(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\ (f_{x_i} = -F_{x_i}/F_y)\ (i = 1.\ldots, n)$$

$(F(x,y) = 0,\ F_y \neq 0$ のときは $f'(x) = -F_x/F_y$, $F(x,y,z) = 0,\ F_z \neq 0$ のときは $f_x = -F_x/F_z, f_y = -F_y/F_z$.)

証明 まず, $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$ をみたす $f(\boldsymbol{x})$ が与えられたとすると, 両辺を x_i で偏微分して $F_{x_i} + F_y f_{x_i} = 0$.

$(F(x,y) = 0,\ F(x,y,z) = 0$ のとき, f を $y(x),\ z(x,y)$ とかけば,

$0 = dF(x,y) = F_x dx + F_y y' dx = (F_x + F_y y')dx,\ \therefore F_x + F_y y' = 0,$

$0 = dF(x,y,z) = F_x dx + F_y dy + F_z(z_x dx + z_y dy) = (F_x + F_z z_x)dx + (F_y + F_z z_y)dy, \therefore F_x + F_z z_x = 0,\ F_y + F_z z_y = 0.)$

次に, 逆関数定理に持ち込む為, 写像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, y) := (\boldsymbol{x}, F(\boldsymbol{x}, y))$ $(\in \mathbb{R}^{n+1})$ (C^r 級) を考えると, $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, b) = \begin{pmatrix} E_n & \boldsymbol{0} \\ * & F_y \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}, b)$, $\det J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, b) = F_y(\boldsymbol{a}, b) \neq 0$ より $J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}, b)$ は正則. よって逆関数定理により $(\boldsymbol{a}, b)$ のある近傍 D と $\boldsymbol{f}$ の C^r 級逆写像 $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{f}(D) \to D$ が存在する. このとき, $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_{n+1})$ とすると $(\boldsymbol{x}, y) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, y)) = (g_1(\boldsymbol{x}, y), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}, y), F(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, y))$ より $g_i(\boldsymbol{x}, y) = x_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$, $F(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, y)) = y$, 即ち $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, y) = (\boldsymbol{x}, g_{n+1}(\boldsymbol{x}, y))$, $F(\boldsymbol{x}, g_{n+1}(\boldsymbol{x}, y)) = y$. ここで $f(\boldsymbol{x}) := g_{n+1}(\boldsymbol{x}, 0)$ とおくと $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$ より求める C^r 級関数 $f(\boldsymbol{x})$ を得た. また, $\boldsymbol{a}$ の近傍 U は, D の中に $\{(\boldsymbol{x}, y) \mid \boldsymbol{x} \in U,\ |y - b| < \varepsilon\} \subset D$ となるものがあるのでそれを取ればよい.

(注 1) 例えば $F(x,y) = 0$ においては x と y を入れ替えて考えることにより, $F_x(a,b) \neq 0$ なら $x = f(y)$, $F(f(y), y) = 0$ となる関数 $f(y)$ が存在して $f'(y) = -F_y(f(y), y)/F_x(f(y), y)$ が成り立つ. 何れの場合も $JF(a,b) \neq O$.

一般には, $F(\boldsymbol{x}) = 0$ $(\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ 上の点 $\boldsymbol{a}$ $(F(\boldsymbol{a}) = 0)$ で. $JF(\boldsymbol{a}) \neq O$ $(\Leftrightarrow \operatorname{rank} JF(\boldsymbol{a}) = 1)$ ならば, $F_{x_i}(\boldsymbol{a}) \neq 0$

となる x_i に対し, 残りの変数を $\bar{\boldsymbol{x}}$ とすれば関数 $x_i=f(\bar{\boldsymbol{x}})$ が存在して, (x_i に $f(\bar{\boldsymbol{x}})$ を代入した形で) $F(\boldsymbol{x})=0$ が成り立つ. (証明は, この x_i を (並び順を変えて) 定理の y とすればよい (並び順を元に戻せばよい).)

$F(x,y,z)=0$ では, $F_z(\boldsymbol{a})\neq 0$ なら $z=f(x,y), F(x,y,f(x,y))=0,\ F_x(\boldsymbol{a})\neq 0$ なら $x=f(y,z), F(f(y,z),y,z)=0,\ \ F_y(\boldsymbol{a})\neq 0$ なら $y=f(x,z),\ F(x,f(x,z),z)=0$ となる関数 f が存在する.

(注 2) 一般に, 図形 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\,|\,F(\boldsymbol{x})=0\}$ は, 図形 : $F(\boldsymbol{x})=0$ や, 単に $F(\boldsymbol{x})=0$ と表される. $F(\boldsymbol{x})$ が C^r 級で, $F(\boldsymbol{a})=0$ となる各点 $\boldsymbol{a}$ で $JF(\boldsymbol{a})\neq O$ とすると, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F(x,y)=0\}$ は各点の近傍で $y=f(x)$ または $x=f(y)$ と表示される滑らかな曲線であり, $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,F(x,y,z)=0\}$ は滑らかな曲面になる. これらは, 曲線 : $F(x,y)=0$, 曲面 : $F(x,y,z)=0$ や, 単に $F(x,y)=0$, $F(x,y,z)=0$ と表される.

例 $F(x,y)=x^2+y^2-1$ とすると, $F(x,y)=0$ は円を表す $(-1\leqq x,y\leqq 1)$. $dF=2xdx+2ydy$ $(F_x=2x,\ F_y=2y)$ より, この円上の点 (x,y) は, $y\neq 0$ のとき陰関数 $y=f(x)$ をもち (実際には $f(x)=\sqrt{1-x^2}$), $x\neq 0$ のとき 陰関数 $x=f(y)$ (実際には $f(y)=\sqrt{1-y^2}$) をもつ. また, $y\neq 0$ のとき $f'(x)=-F_x/F_y=-x/y=-x/\sqrt{1-x^2}$, $x\neq 0$ のとき $f'(y)=-F_y/F_x=-y/\sqrt{1-y^2}$. 尚, 形式的に $0=dF=2xdx+2ydy$ より $dy/dx=-x/y$ と計算できる. 一般には陰関数が具体的に求められることは少ないが, 少なくともその存在と導関数が分かる.

接線・接平面の方程式 図形 $S:F(\boldsymbol{x})=0$ $(\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ldots,x_n))$ は F が C^r 級で, S 上の各点 $\boldsymbol{x}$ で $JF_{\boldsymbol{x}}\neq O$ ならば陰関数も C^r 級, 特に全微分可能なので接空間 (接線, 接平面) が存在する. S 上の点 $\boldsymbol{a}$ を通る S 上の曲線 $\boldsymbol{x}(t)$ $(F(\boldsymbol{x}(t))\equiv 0, \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{a})$ に対し, $\boldsymbol{x}'(0)={}^t(x_1'(0),\ldots,x_n'(0))$ は $\boldsymbol{a}$ における接空間上のベクトル (**接ベクトル**という) である. $F(\boldsymbol{x}(t))=0$ の両辺を t で微分すれば, $t=0$ で

$$F_{x_1}x_1'+\cdots+F_{x_n}x_n'=0 \quad\Longleftrightarrow\quad JF_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}'(0)=0 \quad (\text{行列の積})$$

$\boldsymbol{x}$ を接空間上の点とすると, $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ は接ベクトルなので

$$JF_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0 \qquad \therefore \quad (*)\ F_{x_1}(\boldsymbol{a})(x_1-a_1)+\cdots+F_{x_n}(\boldsymbol{a})(x_n-a_n)=0$$

これが接空間の方程式である. 定理 4.2.6 において $z=f(x,y)$ 上の点 $(a,b,f(\bar{\boldsymbol{a}}))$ $(\bar{\boldsymbol{a}}=(a,b))$ における接平面の方程式が $z-f(\bar{\boldsymbol{a}})=f_x(\bar{\boldsymbol{a}})(x-a)+f_y(\bar{\boldsymbol{a}})(y-b)$ で与えられたが, $F(\boldsymbol{x})=F(x,y,z):=f(x,y)-z$ とおけば, $\boldsymbol{a}=(a,b,f(\bar{\boldsymbol{a}})),\ F_x(\boldsymbol{a})=f_x(\bar{\boldsymbol{a}}),\ F_y(\boldsymbol{a})=f_y(\bar{\boldsymbol{a}})$. $F_z(\boldsymbol{a})=-1$ より $(*)$ は

$$f_x(\bar{\boldsymbol{a}})(x-a)+f_y(\bar{\boldsymbol{a}})(y-b)+(-1)(z-f(\bar{\boldsymbol{a}}))=0$$

となり, 定理 4.2.6 の方程式と一致する. また, $\operatorname{grad}F:={}^tJF$ だったので $0=JF_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}'(0)=\operatorname{grad}F(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{x}'(0)$ (ベクトルの内積). 即ち, 接ベクトル, 接空間は $\operatorname{grad}F(\boldsymbol{a})$ と直交していると考えられ, $\operatorname{grad}F(\boldsymbol{a})$ は S の, 点 $\boldsymbol{a}$ における**法線ベクトル**といわれる. 尚, $F(\boldsymbol{x})=0$ 上の点 $\boldsymbol{a}$ は $JF_{\boldsymbol{a}}\neq O$ のとき**正則点**, $JF_{\boldsymbol{a}}=O$ のとき**特異点**といわれる.

例題 4.4.1 $F(x,y)=x^3+3xy+4xy^2+y^2+y-2=0$ 上の点 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ.

解答例 $dF=(3x^2+3y+4y^2)dx+(3x+8xy+2y+1)dy,\ dF_{\boldsymbol{a}}=4dx+(-6)dy=(4,-6)d\boldsymbol{x}$.
$\therefore 4(x-4)-6(y-(-1))=0$ より $2x-3y=5$.
別解 : $F_y(\boldsymbol{a})=-6\neq 0$ より $\boldsymbol{a}$ の近傍で陰関数 $y=f(x)$ をもち, $f'(1)=-4/(-6)=2/3$. $\therefore$ 接線の方程式は $y+1=2(x-1)/3$, $\therefore\ 2x-3y=5$.

例題 4.4.2(陰関数微分) $F(\boldsymbol{x})=F(x,y)$ は C^2 級, $\boldsymbol{a}=(a,b)$ で $F(\boldsymbol{a})=0,\ F_y(\boldsymbol{a})\neq 0$ とする. 点 $\boldsymbol{a}$ の近傍で定義される $F(\boldsymbol{x})=0$ の陰関数を $y=y(x)$ とすれば $y(x)$ も C^2 級で,

$$y''=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

解答例 $y'=-F_x/F_y$ を x で微分する, $F_x'=F_{xx}+F_{xy}y'=F_{xx}-F_{xy}F_x/F_y,\ F_y'=F_{yx}+F_{yy}y'=F_{xy}-F_{yy}F_x/F_y$ より $y''=-(F_x'F_y-F_xF_y')/F_y^2=$ 求める式.

(注 3) 陰関数定理の一般形は, C^1 級写像 $\boldsymbol{F}:D\to\mathbb{R}^m$, $(D\subset\mathbb{R}^{m+n})$ が点 $\boldsymbol{a}$ で $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$, $\operatorname{rank}J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})=m$ とし, (変数の順序を変えて) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in D$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ とするとき $\operatorname{rank}\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{a})=m$ ならば, $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ とするとき, $\boldsymbol{b}$ のある近傍上の C^1 級写像 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ で $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}$ となるものが存在する, である. (即ち, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ を m 個の連立方程式とみると, m 個の未知数 $\boldsymbol{y}$ について「局所的に」解けることを表す.)

補足

例 次の級数の最後の項はラグランジュの剰余項.

(1) $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+e^{\theta x}\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$, $\quad (e^x)^{(n)}=e^x$,

(2) $\sin x=\displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sin\Bigl(\theta x+\frac{n\pi}{2}\Bigr)\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$, $\quad (\sin x)^{(n)}=\sin\Bigl(x+\frac{n\pi}{2}\Bigr)$,

(3) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}+\cos\Big(\theta x+\frac{n\pi}{2}\Big)\frac{x^n}{n!}$ $(x\in\mathbb{R})$, $\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\Big(x+\dfrac{n\pi}{2}\Big)$,

(4) $\log(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}$ $(-1<x\leqq 1)$, $\quad (\log(1+x))^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

(5) $(1+x)^\alpha=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}{}_\alpha C_k x^k+{}_\alpha C_n(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n$ $(|x|<1)$, $\quad ((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}=:{}_\alpha C_n n!(1+x)^{\alpha-n}$.

剰余項の収束 剰余項 R_n の θ は x と n に依るので θ によらずに $(0<\theta<1$ を用いて$)$ $R_n\to 0$ を示す.

(1) e^x: $R_n=e^{\theta x}x^n/n!$, $|\theta x|\leqq|x|$ より $|R_n|\leqq e^{|x|}|x|^n/n!\to 0$ $(n\to\infty)$ $(\because\ |x|^n/n!\to 0.)$

(2) $\sin x$: $|R_n|=|\sin(\theta x+n\pi/2)x^n/n!|\leqq|x|^n/n!\to 0$ $(n\to\infty)$. (3) $\cos x$: $|R_n|\leqq|x|^n/n!\to 0$ $(n\to\infty)$.

(4) $0\leqq x\leqq 1$ のときは $0\leqq x/(1+\theta x)<1$ なので $|R_n|\leqq\{x/(1+\theta x)\}^n/n\to 0$ が分る. $|x|<1$ ではコーシーの剰余項:

$$|R_n|=\frac{|x|^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}=\frac{|x|^n}{(1+\theta x)}\Big(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\Big)^{n-1}\leqq\frac{|x|^n}{(1+\theta x)}\leqq\frac{|x|^n}{1-|x|}\to 0.\quad \Big(0<\theta<1,\ |x|<1 \text{ より } 0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1.\Big)$$

(5) コーシーの剰余項をとる: $(0<\theta<1,\ |x|<1$ より $0<(1-\theta)/(1+\theta x)<1.$ $0<1-|x|<1+\theta x<\ 1+|x|<2.)$

$$|R_n|=|{}_\alpha C_n nx^n|(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-n}=|{}_\alpha C_n nx^n|\Big(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\Big)^{n-1}(1+\theta x)^{\alpha-1}\leqq|{}_\alpha C_n nx^n|(1+\theta x)^{\alpha-1}.$$

$\alpha-1\geqq 0$ なら $(1+\theta x)^{\alpha-1}\leqq(1+|x|)^{\alpha-1}$, $\alpha-1<0$ なら $(1+\theta x)^{\alpha-1}\leqq(1-|x|)^{\alpha-1}$ より $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ は有界.

$|{}_\alpha C_{n+1}(n+1)x^{n+1}|/|{}_\alpha C_n nx^n|=|(\alpha-n)x/n|\to|x|<1$ $(n\to\infty)$ より $|{}_\alpha C_n nx^n|\to 0$ $(n\to\infty)$. よって $|R_n|\to 0$ $(n\to\infty)$.

平均値の定理の多変数関数への応用

以下, 定理は２変数と多変数で述べ, 証明は２変数で行う. (多変数でも本質的に変わらない.)

定理 4.2.2(全微分可能性) 点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ の近傍で $f(x,y)$ の偏導関数 f_x, f_y が存在し, その１つが $\boldsymbol{a}$ で連続なら, f は $\boldsymbol{a}$ で全微分可能. 特に C^1 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ は全微分可能.

$(\because)$ f_x が $\boldsymbol{a}=(a,b)$ で連続とし, $\Delta f=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})=hf_x(\boldsymbol{a})+kf_y(\boldsymbol{a})+\varepsilon$ とするとき, $\varepsilon/\|\boldsymbol{h}\|\to 0$ $(\|\boldsymbol{h}\|\to 0)$ を示す. $\Delta f=(f(a+h,b+k)-f(a,b+k))+(f(a,b+k)-f(a,b))$ と分ける. 十分小さな $\boldsymbol{h}=(h,k)$ をとり, $f(x,b+k)$ に平均値定理を適用して, $f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=hf_x(a+\theta h,b+k)$ $(0<\theta<1)$. 右辺を $h(f_x(a,b)+\varepsilon_1)$ とおくと f_x の $\boldsymbol{a}$ での連続性 $(\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}f_x(a+\theta h,b+k)=f_x(a,b))$ より $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\varepsilon_1=0$. 次に $f(a,b+k)-f(\boldsymbol{a})=f_y(\boldsymbol{a})k+\varepsilon_2 k$ とすると $\varepsilon_2\to 0$ $(k\to 0)$ $(f_y(\boldsymbol{a})$ の存在). $\therefore\Delta f=f_x(\boldsymbol{a})h+f_y(\boldsymbol{a})k+(\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k)$. $|\varepsilon_1 h+\varepsilon_2 k|/\|\boldsymbol{h}\|\leqq|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0$ $(\|\boldsymbol{h}\|\to 0)$.

定理 4.3.1(シュワルツ (Schwarz) の定理) 点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ の近傍で $f(x,y)$ の偏導関数 f_x, f_y, f_{xy} が存在し, f_{xy} が $\boldsymbol{a}$ で連続なら, $\boldsymbol{a}$ で f_{yx} も存在して $f_{yx}=f_{xy}$. 特に f_{xy}, f_{yx} が連続なら $f_{xy}=f_{yx}$ であり, C^r 級関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ の r 階までの偏微分の順序は自由に入れ替えられる.

$(\because)$ $f_{yx}(\boldsymbol{a})$ が存在するとき, 十分小さい $\boldsymbol{h}=(h,k)$ に対し, $f_y(x,b)=\lim\limits_{k\to 0}(f(x,b+k)-f(x,b))/k$,

$f_{yx}(a,b)=\lim\limits_{h\to 0}(f_y(a+h,b)-f_y(\boldsymbol{a}))/h=\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\{(f(a+h,b+k)-f(a+h,b))-(f(a,b+k)-f(a,b))\}/kh=:\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\Delta/kh$.

$(\{\ \}$ の中を Δ とおいた.) $\therefore\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}$ のとき $\Delta/kh\to f_{xy}(\boldsymbol{a})$ を示せば, $f_{yx}(\boldsymbol{a})$ が存在して $f_{yx}(\boldsymbol{a})=f_{xy}(\boldsymbol{a})$ が分る.

$g(x)=g(x,k):=f(x,b+k)-f(x,b)$ とおくと $\Delta=g(a+h)-g(a)$. $g(x)$ に平均値定理を用いると,

$g(a+h)-g(a)=hg'(a+\theta h)=h(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b))$ となる $0<\theta<1$ がある. 更に右辺に $(f_x(a+\theta h,y)$ に対し) 平均値定理を用いると $h(f_x(a+\theta h,b+k)-f_x(a+\theta h,b))=hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k)$ となる $0<\theta'<1$ がある. $\therefore$

$hkf_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k)=g(a+h)-g(a)=\Delta$. $\therefore\Delta/kh=f_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k)$. f_{xy} は $\boldsymbol{a}$ で連続なので,

$\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}f_{xy}(a+\theta h,b+\theta' k)=f_{xy}(\boldsymbol{a})$. $\therefore f_{xy}(\boldsymbol{a})=\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\Delta/kh=\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\Delta/kh=f_{yx}(\boldsymbol{a})$. (次の補題参照)

補題 (累次極限) $f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$, $\boldsymbol{a}=(a,b)$ について $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$ のとき, $\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=g(x)$ ならば $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=h(y)$ もみたせば $\lim\limits_{y\to b}h(y)=A$, 即ち, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x,y)$.

$(\because)$ $\forall\varepsilon>0$ に対し, $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|g(x)-A|\leqq|g(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<\varepsilon$ となる $\delta>0$ があればよい.

$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=A$ より $\delta_1=\delta(\varepsilon/2)$ がとれて $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta_1\Rightarrow|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon/2$. $\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=g(x)$ より $\delta_2=\delta(\varepsilon/2)$ がとれて $0<|y-b|<\delta_2\Rightarrow|f(x,y)-g(x)|<\varepsilon/2$. $\delta:=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすれば, $0<|x-a|<\delta$ のとき

$0<|y-b|<\sqrt{\delta^2-(x-a)^2}$ ならば, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\leqq\delta_1$ より $|f(x,y)-A|<\varepsilon/2$, かつ $|y-b|<\delta\leqq\delta_2$ より $|f(x,y)-g(x)|<\varepsilon/2$. $\therefore$ $|g(x)-A|\leqq|g(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. 他も同様.

定理 4.3.1 では, $\lim\limits_{k\to 0}\Delta/kh=(f_y(a+h,b)-f_y(\boldsymbol{a}))/h$, $f_{yx}(\boldsymbol{a})=\lim\limits_{k\to 0}\lim\limits_{k\to 0}\Delta/kh=\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\Delta/kh=f_{xy}(\boldsymbol{a})$.