写像 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = {}^t(f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))$ の各成分関数 $f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})$ が全微分可能 (偏微分可能) のとき, $\boldsymbol{f}$ は**全微分可能** (**偏微分可能**) という. このとき, $f_1, \ldots, f_m$ のヤコビ行列を縦に並べた $m \times n$ 行列を写像 $\boldsymbol{f}$ の**ヤコビ行列**, または**関数行列**といい, $J\boldsymbol{f}$ 等と表す :

$$J\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} Jf_1 \\ \vdots \\ Jf_m \end{pmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad \left((i,j) \text{ 成分が } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

特に $m = n$, $J\boldsymbol{f}$ が正方行列のとき, $J\boldsymbol{f}$ の行列式 $\det J\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{f}$ の**関数行列式**, **ヤコビ行列式** (Jacobian determinant), 又は**ヤコビアン** (Jacobian) といい, (この絶対値を考える為, 行列式に絶対値記号 $|\ |$ は用いずに) 次の様に表す :

$$\det J\boldsymbol{f} = \frac{D\boldsymbol{f}}{D\boldsymbol{x}} = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}, \quad \left((x,y) = (x(u,v), y(u,v)) \text{ のとき, } \frac{D(x,y)}{D(u,v)}, \ \left(\text{教科書の } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \text{ は用いない} \right) \right)$$

• 関数の連続性と微分可能性では, 四則演算, 合成関数, 逆関数に関する定理が基本的であった. 多変数関数と写像の連続性に関しては演算と合成関数について説明した. また, 多変数関数の四則演算の偏微分可能性は 1 変数の場合から出る. 次に合成関数の微分可能性について考える.

合成関数の微分　区間 I からの連続写像 $\boldsymbol{f}: I \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{f}(x) = {}^t(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ を**曲線** (curve) という. (数学 III では曲線の媒介変数 (パラメーター) 表示と呼んだ.) また, 各成分関数 $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ が微分可能 (C^r 級) のとき, $\boldsymbol{f}(x)$ は**微分可能** (C^r **級**) という.

定理 4.2.4(合成関数の微分 I)　関数 $g(\boldsymbol{y})$ が領域 $D \subset \mathbb{R}^m$ 上全微分可能, 曲線 $\boldsymbol{f}: I \to \mathbb{R}^m$ が開区間 I 上微分可能で $\boldsymbol{f}(I) \subset D$ とすると, 合成関数 $g \circ \boldsymbol{f}: I \to \mathbb{R},\ z = (g \circ \boldsymbol{f})(x) = g(\boldsymbol{f}(x))$ は I で微分可能で次が成り立つ :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{d(g \circ \boldsymbol{f})}{dx} = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\boldsymbol{f}(x)) \frac{df_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(\boldsymbol{f}(x)) \frac{df_m}{dx} = g_{y_1}(\boldsymbol{f}(x)) f_1'(x) + \cdots + g_{y_m}(\boldsymbol{f}(x)) f_m'(x) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}\ \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_m} \right)_{\boldsymbol{f}(x)} {}^t\!\left(\frac{df_1}{dx}, \ldots, \frac{df_m}{dx} \right) = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \frac{d\boldsymbol{f}}{dx}(x) = Jg(\boldsymbol{f}(x)) \frac{d\boldsymbol{f}}{dx}(x) \quad (\text{行列の積}) \end{aligned}$$

$g(\boldsymbol{y})$ を $z(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{f}(x)$ を $\boldsymbol{y}(x) = {}^t(y_1(x), \ldots, y_m(x))$ と表すと, ($z = z(x,y),\ \boldsymbol{x}(t) = (x(t), y(t))$ 　のとき,)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial y_m} \frac{dy_m}{dx} = \frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = Jz \frac{d\boldsymbol{y}}{dx} \quad \left(\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right)$$

(証明) x の増分 Δx に対し, $\Delta y_i = \Delta f_i := f_i(x + \Delta x) - f_i(x) = f_i'(x) \Delta x + \varepsilon_i |\Delta x|$ とおくと, $\varepsilon_i \to 0$ ($\Delta x \to 0$) ($\forall i$).
$\Delta g = Jg \Delta \boldsymbol{y} + \varepsilon |\Delta \boldsymbol{y}| = g_{y_1} \Delta y_1 + \cdots + g_{y_m} \Delta y_m + \varepsilon |\Delta \boldsymbol{y}|$ に代入して,

$$(*) \qquad \Delta g = (g_{y_1} f_1'(x) + \cdots + g_{y_m} \Delta f_m'(x)) \Delta x + (g_{y_1} \varepsilon_1 + \cdots + g_{y_m} \varepsilon_m + \varepsilon |\Delta \boldsymbol{y} / \Delta x|) |\Delta x|$$

右辺第 2 項を見る. $\Delta x \to 0$ のとき, $\varepsilon_i \to 0$ より $g_{y_i} \varepsilon_i \to 0$, また $\Delta y_i \to 0 \Rightarrow |\Delta \boldsymbol{y}| \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$, $|\Delta \boldsymbol{y} / \Delta x| \to |d\boldsymbol{y}/dx|$ (有限値) より $\varepsilon |\Delta \boldsymbol{y} / \Delta x| \to 0$. 従って, $\Delta x \to 0$ のとき $(g_{y_1} \varepsilon_1 + \cdots + g_{y_m} \varepsilon_m + \varepsilon |\Delta \boldsymbol{y} / \Delta x|) \to 0$ より $dg/dx = g_{y_1} f_1'(x) + \cdots + g_{y_m} f_m'(x)$.　(注) 形式的に全微分 $dz = z_{y_1} dy_1 + \cdots + z_{y_m} dy_m$ を dx で割った形になる.

定理 4.2.5(合成関数の微分 II: 連鎖公式 (chain rule)) $D \subset \mathbb{R}^n,\ D' \subset \mathbb{R}^m$ を領域とする.
写像 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が D で偏微分可能, 写像 $\boldsymbol{g}: D' \to \mathbb{R}^\ell,\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ が D' で全微分可能で $\boldsymbol{f}(D) \subset D'$ とするとき, 合成写像 $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}): D \to \mathbb{R}^\ell,\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ は D で $x_1, \ldots, x_n$ に関し偏微分可能であり,
$J(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})_{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})} J\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}$ (右辺は $\ell \times m$ 行列と $m \times n$ 行列の積), 即ち次が成り立つ:

$$\frac{\partial(g_i \circ \boldsymbol{f})}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} = \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{y}} \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}} \right) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

この関係を**連鎖公式** (chain rule, **連鎖律**) という. $z = z(x,y),\ (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ のときは

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (z_u = z_x x_u + z_y y_u,\ \ z_v = z_x x_v + z_y y_v)$$

(証明)　x_i 以外を固定して, $\boldsymbol{f}$ を x_i のみの写像とみて上の定理 4.2.4(の x を x_i に, $g(\boldsymbol{y})$ を $g_i(\boldsymbol{y})$ に代えて) 適用すれば得られる. ($\frac{d}{dx}$ は $\frac{\partial}{\partial x_i}$ になる.)

全微分の不変性　$z = z(x,y), (x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ が何れも全微分可能のとき,

$$dz = z_x dx + z_y dy = z_u du + z_v dv. \qquad (\text{問 これを示せ.})$$

例 (4.2.1) ${}^t(x,y)=\boldsymbol{f}(r,\theta)={}^t(r\cos\theta,\,r\sin\theta)$ とする. このとき, $J\boldsymbol{f}$, $\det J\boldsymbol{f}$. $(J\boldsymbol{f})^{-1}$ は,

$$\begin{cases} x_r=\cos\theta,\ x_\theta=-r\sin\theta \\ y_r=\sin\theta,\ \ y_\theta=\ \ r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow J\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},\ \det J\boldsymbol{f}=r,\ (J\boldsymbol{f})^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r & y/r\\ -y/r^2 & x/r^2\end{pmatrix}$$

$z=z(x,y)$ のとき, $z_r=z_xx_r+z_yy_r=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta,\quad z_\theta=z_xx_\theta+z_yy_\theta=-z_xr\sin\theta+z_yr\cos\theta.$
$z_x=z_rr_x+z_\theta\theta_x=z_r\cos\theta+z_\theta(-\sin\theta/r),\ z_y=z_rr_y+z_\theta\theta_y=z_r\sin\theta+z_\theta\cos\theta/r..$
$(z_x)^2+(z_y)^2=(z_r\cos\theta-z_\theta\sin\theta/r)^2+(z_r\sin\theta+z_\theta\cos\theta/r)^2=(z_r)^2+(z_\theta)^2/r^2$. 即ち,

$$\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2=\Big(\frac{\partial z}{\partial r}\Big)^2+\frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big)^2$$

高階偏導関数と順序交換 $f(x_1,\dots,x_n)$ の偏導関数 f_{x_i} がまた偏微分可能のとき, 2 階偏導関数 $f_{x_ix_j}:=(f_{x_i})_{x_j}$ ($f(x,y)$ のとき $f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}$) が考えられる. 同様に 3 階以上の (高階の) 偏導関数 $f_{x_ix_jx_k},\dots$ が定義される.
C^r 級関数 領域 D 上で r 階までの偏導関数が全て存在して連続のとき, $f(\boldsymbol{x})$ は D (上) で r **回連続微分可能**, 又は C^r **級**といい, 何回でも偏微分可能のとき, **無限回連続微分可能**, 又は C^∞ **級**という. 尚, 連続のとき C^0 **級**という. 写像 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\dots,f_m(\boldsymbol{x}))$ は, 各成分関数 $f_i(\boldsymbol{x})$ が C^r 級のとき C^r **級**という. なお, 特に断らなければ「C^r 級」は $r=1,2,\dots,\infty$ のときとする.

f_{xy} と f_{xy} は定義上異なる関数だが 2 階偏導関数の連続性のもとに同一の関数であることが示される.

定理 4.3.1(シュワルツ (Schwarz) の定理) $f(x,y)$ について, 点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ の近傍で f_x, f_y, f_{xy} が存在して, f_{xy} が $\boldsymbol{a}$ で連続ならば, $f_{yx}(\boldsymbol{a})$ も存在して $f_{xy}(\boldsymbol{a})=f_{yx}(\boldsymbol{a})$ が成り立つ.
特に, C^2 級関数 $f(x_1,\dots,x_n)$ について $f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$ が成り立つ.

この証明にも平均値の定理が用いられるので証明は略す. 3 変数以上でも本質的に 2 変数の偏微分として扱える.

2 階以上の偏導関数は次の様に表される:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)=f_{yx}=f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy},\ \ \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2},\ \cdots$$

C^r 級関数 $f(\boldsymbol{x})$ は, r 回までの偏微分は微分の順序によらず, $f(x,y)$ のとき k 階偏導関数 ($0\leqq k\leqq r$) は次の形:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{\partial^k f}{\partial x^p\partial y^{k-p}}\quad(p+q=k,\ 0\leqq p\leqq k)$$

C^r 級関数の四則演算結果や, C^r 級写像と C^r 級関数 (写像) の合成関数 (合成写像) はまた C^r 級である (数学的帰納法を用いる). 従って, 初等関数は C^∞ 級になる.

接平面 曲線の接線と同様, 曲面には接平面が定義される. 幾何学的 (図形的) には曲面 (surface) S 上の点 P を通る平面 π で, P の近くの曲面上の点 Q から平面 π に下した垂線の足を H とするとき $\displaystyle\lim_{\overline{\mathrm{PQ}}\to 0}\overline{\mathrm{QH}}/\overline{\mathrm{PQ}}=0$ となるものがあれば, それを P における S の**接平面**という. (図. 存在しない場合もある.)
連続関数 $z=f(x.y)$ のグラフ $\{(x,y,f(\boldsymbol{x}))\,|\,\boldsymbol{x}\in D\}$ ($\boldsymbol{x}$=(x,y)) は $\mathbb{R}^3$ の曲面 S を定めるが, これを,
曲面 $S:z=f(x.y)$ と表す. このとき, S 上の点 P に接平面が存在する為の条件について述べる.

定理 4.2.6 関数 $z=f(x,y)$ が点 $\boldsymbol{a}=(a,b)$ で全微分可能なら, 曲面 $S:z=f(x.y)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,b,f(\boldsymbol{a}))$ には S の接平面 π が存在し, その方程式は次式で与えられる: ($\boldsymbol{x}=(x,y)$, $\Delta\boldsymbol{x}=(\Delta x,\Delta y)=(x-a,y-b)$ とする)

$$z-f(\boldsymbol{a})=f_x(\boldsymbol{a})(x-a)+f_y(\boldsymbol{a})(y-b)\quad(z-f(\boldsymbol{a})=f_x(\boldsymbol{a})\Delta x+f_y(\boldsymbol{a})\Delta y=Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x})$$

特に C^r 級関数 $z=f(x,y)$ ($r\geqq 1$) については各点で S の接平面が存在する.

(証明) 上式で定義される平面 π が接平面になることを示せばよい. S 上の点を $\mathrm{Q}(x,y,f(\boldsymbol{x}))$ とすると,
$\overline{\mathrm{PQ}}^2=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^2+|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|^2\geqq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^2$. より $\overline{\mathrm{PQ}}\geqq|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|=|\Delta\boldsymbol{x}|$.
Q から π に下した垂線の足 H と π 上の点 $\mathrm{R}(x,y,f(\boldsymbol{a})+Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x})$ をとると (x,y 座標が同じだから)
$\overline{\mathrm{QH}}\leqq\overline{\mathrm{QR}}=|\Delta f-Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}|$ (Δf=$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})$). 全微分可能 $\Leftrightarrow|\Delta f-Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}|/|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ ($|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$) と,
$\mathrm{Q}\to\mathrm{P}$ なら $|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$ より $\overline{\mathrm{QH}}/\overline{\mathrm{PQ}}\leqq\overline{\mathrm{QR}}/\overline{\mathrm{PQ}}=|\Delta f-Jf(\boldsymbol{a})\Delta\boldsymbol{x}|/|\Delta\boldsymbol{x}|\to 0$. よって π は S の接平面.

• $\Delta z:=z-f(\boldsymbol{a})$ とし, $\mathbb{R}^3$ の点 $\mathrm{T}(\boldsymbol{t}={}^t(x,y,z))$ をとると, $\overrightarrow{\mathrm{PT}}={}^t(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=:\Delta\boldsymbol{t}$. T が π 上にある $\Longleftrightarrow$
$\Delta z=f_x(\boldsymbol{a})\Delta x+f_y(\boldsymbol{a})\Delta y\Leftrightarrow 0=f_x(\boldsymbol{a})\Delta x+f_y(\boldsymbol{a})\Delta y+(-1)\Delta z=(f_x(\boldsymbol{a}),f_y(\boldsymbol{a}),-1)\Delta\boldsymbol{t}={}^t(f_x(\boldsymbol{a}),f_y(\boldsymbol{a}),-1)\cdot\Delta\boldsymbol{t}$.
(最後の式は内積を, その前の式は行列の積) 即ち, 接平面上のベクトル (**接ベクトル**という) $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ はベクトル ${}^t(f_x(\boldsymbol{a}),f_y(\boldsymbol{a}),-1)$ に直交している (**法線ベクトル**という) ことを表している.