

● 微分の定義・定理の復習, 補足と拡張

以下, 関数 $y = f(x)$ は点 $x = a$ を含む開区間 (点 a の開近傍という) 上定義されているとする. 有限な極限值

$$(*) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A \quad \left(= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right)$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ (又は点 a) で微分可能 (differentiable) といい, この極限值 A を $f'(a)$ で表し, 微分係数 (differential coefficient) と呼んだ.

また, x の増分 h を Δx と書き, 対応する $y = f(x)$ の増分を Δy や $\Delta f (= f(a+\Delta x) - f(a))$ と表し,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \right)$$

とも表した. 微分係数 A は $f'(a)$ 以外にも色々な表し方がある:

$$A = f'(a) = \frac{dy}{dx}(a) = y'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{df(a+h)}{dh} \Big|_{h=0}$$

(最右辺は, h の関数 $g(h) := f(a+h)$ の $h=0$ における微分係数とも理解できる. 定義式は同じになる.)

$y = f(x)$ が開区間 I の各点 a で微分可能のとき, f は I で微分可能といい, a に $f'(a)$ を対応させる関数 f' を f の導関数 (derivative, derived function) といった. 導関数も微分係数に対応した色々な表し方がある: $(f'(x), y', \frac{df}{dx}(x), \frac{df(x)}{dx}, \frac{dy}{dx} \equiv dy/dx, \text{等})$ また, 導関数を求める課程を微分 (演算)(differentiation) といった.

・多変数関数 $f(\mathbf{x})$ の偏微分も同様に定義される.

$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は点 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ の近傍 D で定義されているとする. ($\mathbf{a}$ の近傍 D : D が, $\mathbf{a}$ を中心とする, ある半径 $r (> 0)$ の開球体 (開円板) $B_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$ を含むとき. 1 変数では開区間.) x_i の関数 $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ が $x_i = a_i$ で微分可能のとき, f は点 $\mathbf{a}$ で x_i に関して偏微分可能であるといい, この微分係数を, 点 $\mathbf{a}$ における f の x_i に関する偏微分係数といい, 次の様に表す:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}), f_{x_i}(\mathbf{a}) \quad \left(= \frac{df(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{dx_i} \Big|_{x_i=a_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h} \right)$$

$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ を基本ベクトルとすると, $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+h, a_{i+1}, \dots, a_n) = \mathbf{a} + h\mathbf{e}_i$ なので

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{df(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i)}{dh} \Big|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})}{h}$$

(つまり, x_i 以外を定数として x_i で微分したもの.) 二変数関数 $z = f(x, y)$ の場合は, $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{a} = (a, b)$ として,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \frac{df(x, b)}{dx} \Big|_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \frac{df(a, y)}{dy} \Big|_{y=b}$$

$D \subset \mathbb{R}^n$ の各点 $\mathbf{a}$ に, D に含まれる ある半径 $r (> 0)$ の $B_r(\mathbf{a})$ が存在するとき D を $\mathbb{R}^n$ の開集合という.

以下, $f(\mathbf{x})$ は開集合 D 上定義されているとする. $f(\mathbf{x})$ が D の各点 $\mathbf{a}$ で x_i に関し偏微分可能のとき, f は x_i に関し偏微分可能といい, $\mathbf{a}$ に $f_{x_i}(\mathbf{a})$ を対応させる関数 f_{x_i} を f の x_i に関する偏導関数 (partial derivative) という. 偏導関数を求めることを偏微分する, という. 偏導関数も色々な表し方がある:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{x_i}(\mathbf{x}), f_{x_i}, \quad z = f(x, y) \text{ のとき } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f_x, f_y, z_x, z_y, \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{df(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i)}{dh} \Big|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{df(x+h, y)}{dh} \Big|_{h=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \text{ 等.}$$

例 $z = f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 \Rightarrow z_x = 2x + 3y, z_y = 3x + 2y$.

(注) $\mathbf{e}_i$ の代わりに $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ を用いて得られる $\frac{df(\mathbf{a} + h\mathbf{v})}{dh} \Big|_{h=0}$ を $\mathbf{v}$ 方向の微分 (係数) という.

1 変数に戻る. 実は, 微分可能性の定義と微分係数 $A = f'(a)$ は次の様に定義する方が都合がよい:

$\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a))/h = A \iff \lim_{h \rightarrow 0} |f(a+h) - f(a) - Ah|/|h| = 0$ より, $R = R(h) := f(a+h) - f(a) - Ah$ とおくと $f(a+h) = f(a) + Ah + R$, $\lim_{h \rightarrow 0} |R|/|h| = 0$. 従って, $y = f(x)$ が $x=a$ で微分可能とは

$$(**) \quad f(a+h) = f(a) + Ah + R, \quad \lim_{h \rightarrow 0} |R|/|h| = 0 \text{ をみたす } A \text{ が存在する}$$

と定義する. $\varepsilon := R/|h|$ において次の様に定義してもよい:

(**) $f(a+h) = f(a) + Ah + \varepsilon|h|$, $\lim_{h \rightarrow 0} |\varepsilon| \rightarrow 0$ をみたす A が存在する (但し, $h=0$ のとき $\varepsilon=0$ とする)

増分 Δx , $\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a)$ を用いると, $\Delta f = A\Delta x + \varepsilon|\Delta x|$, $|\varepsilon| \rightarrow 0$ ($|\Delta x| \rightarrow 0$)

次の4つの定理は高校の数学 III に証明を含めて載っているが, 合成関数の微分では修正が必要なので略証を付けておく. 尚, 定理の番号は教科書 (入門微分積分) での番号.

定理 2.1.1 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能なら $f(x)$ は a で連続である.

(略証) $|f(a+h) - f(a)| = |Ah + \varepsilon|h| \leq |A||h| + |\varepsilon||h| \rightarrow 0$ ($|h| \rightarrow 0$) より連続.

定理 2.1.3 (微分の四則演算) 関数 $f(x), g(x)$ が x で微分可能ならば次の関数も x で微分可能で,

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, (2) $(cf(x))' = cf'(x)$ ($c \in \mathbb{R}$), (3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(4) $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g(x)^2$ ($g(x) \neq 0$ となる x で). 偏微分についても同様である.

(略証) (3): $\Delta y := f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \Delta f \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \Delta g$. $h \rightarrow 0$ のとき, $g(x+h) \rightarrow g(x)$ より $\Delta y/h = (\Delta f/h) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot (\Delta g/h) \rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. (4): g は x で連続 $\therefore h$ が十分小なら $g(x+h) \neq 0$ より $\Delta(1/g) := 1/g(x+h) - 1/g(x) = -\Delta g/(g(x+h)g(x))$. $\therefore \Delta(1/g)/h \rightarrow -g'(x)/g(x)^2$ ($h \rightarrow 0$). これと (3) による.)

定理 2.1.4 (合成関数の微分) 関数 $y = f(x)$ が $x=a$ で, $z = g(y)$ が $y=f(a)$ で微分可能ならば合成関数 $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ も $x=a$ で微分可能で $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$, 即ち:

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}(a) = \frac{dg}{dy}(f(a)) \cdot \frac{df}{dx}(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

(略証) 増分を $\Delta f = f'(a)\Delta x + \varepsilon_1\Delta x$, $\Delta g = g'(f(a))\Delta y + \varepsilon_2\Delta y$ とすると $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ($\Delta x \rightarrow 0$), $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ($\Delta y \rightarrow 0$). Δy に Δf を代入して, $\Delta z = \Delta g = g'(f(a)) \cdot f'(a)\Delta x + \{g'(f(a))\varepsilon_1 + \varepsilon_2 f'(a) + \varepsilon_2 \varepsilon_1\}\Delta x$. $\{ \}$ 内を ε' とおけば, $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, かつ $\Delta y = \Delta f \rightarrow 0$ より $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ なので, $\varepsilon' \rightarrow 0$. $\therefore dz/dx = g'(f(a)) \cdot f'(a)$. ($\Delta f = 0$ にも対応.))

定理 2.1.5 (逆関数定理) 関数 $y = f(x)$ が开区間 I で狭義単調かつ連続で ($\therefore$ 連続な逆関数をもち), $x=a \in I$ で微分可能かつ $f'(a) \neq 0$ なら, 逆関数 $x = g(y)$ も $y=f(a)$ で微分可能で $g'(f(a)) = 1/f'(a)$, 即ち:

$$g'(f(a)) = \frac{dg}{dy}(f(a)) = \left(\frac{df}{dx}(a) \right)^{-1} = 1/f'(a). \quad \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} = 1 / \frac{dy}{dx}.$$

特に $y = f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$) なら $x = g(y) = f^{-1}(y)$ は $J = f(I)$ で微分可能である.

また, f に関する仮定を「 $y = f(x)$ は开区間 I で連続な導関数 $f'(x)$ をもち, $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$)」とすると, 逆関数 $g(x)$ が存在して, $f(I)$ で微分可能で連続な導関数 $g'(y)$ をもつ.

(略証) 増分 Δy に対し, $\Delta x = \Delta g$ は一意に定まり, g が連続より $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$.

$\therefore dx/dy = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x/\Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1/(\Delta y/\Delta x) = 1/f'(a)$. (数口の証明は逆関数の微分可能性を仮定した証明.)

f が I の各点 a で微分可能のときは, g は $f(I)$ の各点 $f(a)$ で微分可能, 即ち g は $f(I)$ で微分可能,

「また」以下は, まず, $f(x)$ が I で導関数をもつので微分可能, 従って連続. $f'(x) \neq 0$ ($x \in I$) より $f'(x) > 0$ ($x \in I$) と $f'(x) < 0$ ($x \in I$) のどちらか一方だけが成り立つので $f(x)$ は狭義単調. 従って連続な逆関数 $g(y)$ が存在する. また, 前半の結果より, $g(y)$ は $f(I)$ で微分可能で, f' が連続, かつ $f'(x) \neq 0$ なので $g'(y) = 1/f'(g(y))$ も連続.

例 12 $(\sin^{-1} x)' = \frac{d \sin^{-1} x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$)

($\therefore$) $I = (-\pi/2, \pi/2)$ とする. $y = \sin x$ ($x \in I$) は I 上 $y' = \cos x > 0$ より 逆関数 $\sin^{-1} x$ も連続な導関数をもち,

$$(\sin^{-1} y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (-1 < y < 1)$$

尚, $y = \sin^{-1} x$ は $[-1, 1]$ で定義され連続であるが, 両端点 $x = \pm 1$ では微分が定義できず, $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\sin^{-1} x)' = \infty$.

問 次を示せ: (1) $(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$), (2) $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ($-\infty < x < \infty$)

高階 (高次) 導関数 関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能のときその導関数を **2階 (2次) 導関数** といい, $f''(x)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$ 等と表し, これが順次繰り返せるとき, $f(x)$ を n 回微分して得られる関数を **n 階 (n 次) 導関数** といい, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ 等と表す. これらは $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $D^n f(x)$ 等とも表され, 総称して**高階 (高次) 導関数**という. $f^{(0)}(x) := f(x)$ とする. さらに, n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ が連続 (continuous) であるとき, $f(x)$ は **n 回連続微分可能**, あるいは **C^n 級**という. また, 何回でも微分可能な関数を**無限回連続微分可能関数**, あるいは **C^∞ 級関数**という. **初等関数**は適切な定義域において **C^∞ 級**であることが, 数学的帰納法により示せる. (証明を試みてみよう.)