

微分積分学第一

内容：多変数関数 (1 変数関数を含む) の微分積分とその応用 (前半は微分, 後半は積分) (高校では 1 変数関数のみ)

多変数関数：2 変数関数 $f(x, y)$, 3 変数関数 $f(x, y, z)$, n 変数関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (1 変数関数 $f(x)$).

例 $f(x, y) : x^2 + y^2, e^{xy}, \cos x + \sin x$, (曲線の方程式の左辺として数学 III に出ているもの) 等.

$f(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2, e^{x^2+yz}, \sin x + \sin y + \sin z$ 等, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ 等.

ベクトル記法： $\mathbf{x} = (x, y), (x, y, z), (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおくとこれらは $f(\mathbf{x})$ と表され, $f(x)$ と同様に扱える.
(行ベクトル表記をしているが, 列ベクトルと考えておく方が都合がよい.)

● 講義では主として 2,3 変数関数を取り扱うがベクトル記法を用いれば n 変数でも同様に扱える.

1. 高校の (数学 III, 数学 II の) 復習と補足 (数列, 級数の収束については後期の微分積分学第二で詳しく学ぶ.)

● **関数** 数学 II, III で出てきた関数 (1 変数関数) には次の様なものがある：

多項式： $x^4 + 2x^2 + 3$ 等, **有理関数** (分数関数)： $\frac{3x-2}{x^2+3}$ 等, **指数関数：** e^x , **三角関数：** $\sin x, \cos x, \tan x$.

これらの逆関数として, **冪乗根** (累乗根, 無理関数)： $\sqrt[n]{x}$ (x^n の逆関数), **対数関数：** $\log x$ (e^x の逆関数).

三角関数：三角関数には上記のもの以外に (余り使われないが) $\cot x, \sec x, \csc x$ がある：($\csc$ は cosec と書く)
 $\cotangent$ (余接) $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\secant$ (正割) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosecant}$ (余割) $\csc x = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$

逆三角関数 三角関数の逆関数として**逆三角関数** $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ や $\operatorname{Sin}^{-1} x, \operatorname{Cos}^{-1} x, \operatorname{Tan}^{-1} x$ と書き, arcsine, arccosine, arctangent, 逆正弦, 逆余弦, 逆正接 という) 等がある:
 $y = \sin x \Leftrightarrow x = \sin^{-1} y$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -1 \leq y \leq 1$), $y = \cos x \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y$ ($0 \leq x \leq \pi, -1 \leq y \leq 1$),
 $y = \tan x \Leftrightarrow x = \tan^{-1} y$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty$) (詳しくは後述)

() 内に記した三角関数の定義域で考えた逆関数を逆三角関数の**主値**といい, それらを $\sin^{-1} y$ 等で表している.

問 次を示せ. (1) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$). (2) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ ($-1 \leq x \leq 1$).

(3) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 1/x = \pi/2$ ($x > 0$). (4) $\tan^{-1} 1/2 + \tan^{-1} 1/3 = \pi/4$.

双曲線関数 三角関数 (別名円関数) の類似として双曲線関数がある. $(X, Y) = (\cosh x, \sinh x)$ が単位円上の点の座標を表す様に $(X^2 + Y^2 = 1)$, $(X, Y) = (\cosh x, \sinh x)$ が直角双曲線 $X^2 - Y^2 = 1$ 上の点の座標を表す関数として,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, e^x = \cosh x + \sinh x)$$

と定義され, それぞれ**双曲的余弦** (hyperbolic cosine), **双曲的正弦** (hyperbolic sine) という. **双曲的正接・余接** (hyperbolic tangent, cotangent), **双曲的正割・余割** (hyperbolic secant, cosecant) も三角関数と同様に定義される:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

加法定理や導関数も三角関数と類似している: (次式の複号は同順)

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \quad \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x = 1/\cosh^2 x$$

問 これらを示せ.

初等関数：上述の基本関数, 即ち, 多項式, (有理関数,) 指数関数, 三角関数, 冪乗根, 対数関数, 逆三角関数に, 加減乗除と合成を有限回繰り返して得られる関数を**初等関数**という. 高校では, 逆三角関数を含まない初等関数を扱っている.

高校では他に, $f(x) = [x]$ ($[x]$ はガウス記号), 複素数値関数 $f(x) = \cos x + i \sin x (= e^{ix})$ 等が出ている.

(注) 等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を**オイラー (Euler) の公式**という. cf. $e^x = \cosh x + \sinh x$. (証明は級数展開後)

指数法則 $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ と三角関数の加法定理が同等になる: 右辺 $= \cos(x+y) + i \sin(x+y)$,

左辺 $= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$.

(Euler の公式により, 複素数の範囲では指数関数と三角関数が同等のものであることが分かる.)

● **記号等の復習と補足**

集合：集合とは, 特定の条件をみたすもの (数学的対象) の集まりのこと. 集合 X に対し,

$x \in X$ は, 「 x は X の**元** (要素) である」, 「 x は X に属す」を表す.

$A \subset X$ ($\Leftrightarrow$ 「 $a \in A \Rightarrow a \in X$ 」) は 「 A は X の部分集合である」を表す. ($A = X$ の場合を含む.)

ここで「 $\Leftrightarrow$ 」は「定義」を, 「 $\Rightarrow$ 」は「ならば」を表す. また, 「 $\Longleftrightarrow$ 」は「同値」を表す.

集合の例： $\mathbb{R}$ = 実数全体の集合 = 数直線。 ($x \in \mathbb{R}$ は「 x は実数である」を意味する.) (以下「の集合」は略す.)

$\mathbb{Q}$ = 有理数全体, $\mathbb{Z}$ = 整数全体, $\mathbb{N}$ = 自然数全体, $\mathbb{C}$ = 複素数全体.

集合の記法 $\{x \mid x \text{ に関する条件 } P(x)\}$ ($\{x \in X \mid P(x)\}$) は $P(x)$ をみたす (X の元) x 全体の (部分) 集合を表す.

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = xy \text{ 平面 (座標平面)}$. $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = xyz \text{ 空間 (座標空間)}$,

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ (n 次元 (Euclid) 空間という).

区間 (interval) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ に対し, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **开区間**, $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **閉区間**,

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ 半开区間, $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,

等, 不等式をみたす $\mathbb{R}$ の部分集合 (数直線上一続きの部分を表す部分) を**区間**という. 区間は I と表される事が多い.

尚, $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ も区間とする. 但し, $[a, a] = \{a\}$ (一点), $(a, a) = \emptyset$ (空集合).

(注) $a < b$, $a \leq b$ 等の不等式が与えられたとき, 特に断りがなければ a, b は (大小関係が定められていない複素数やベクトルではなく) 実数とする.

● 定義等の復習, 補足と拡張

関数: 一般に, **関数** (function) や**写像** (map, mapping) とは集合 X の各元 x に集合 Y の元 y を1つずつ対応させる規則 f のことで, $y = f(x)$ 等と表す. X を**定義域** (domain), Y を**値域** (range), $f(x)$ を x の**像** (image) という. 値が数 ($Y = \mathbb{R}$ 等) のとき関数といい, そうでないとき写像ということが多い. 通常は $f: X \rightarrow Y$ の様に定義域と値域を明示するが, ここで扱う関数の値域は $\mathbb{R}$, 定義域は, 1変数関数では $\mathbb{R}$ 又はその部分集合 I , n 変数関数では $\mathbb{R}^n$ 又はその部分集合 D であることがほとんどである為略され, 代わりに変数を $f(x), f(x, y), f(x, y, z), f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の様に明示することで定義域がそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ 又はその部分集合であることを表すことが多い.

$A \subset X$ に対し, $x \in A$ の像全体 $\{f(x) \mid x \in A\}$ を $f(A)$ と表し, f による A の**像**という.

$A = X$ のとき, $f(X)$ は $\text{Im } f$ と表し, f の**像**という.

・一般に, 関数や写像 $f, g: X \rightarrow Y$ が (関数や写像として) 「等しい」とは, 全ての $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ (同じ元になる) が成り立つときで, 「恒等的に等しい」ともいわれ, $f = g$, $f(x) \equiv g(x)$, 「 $f(x) = g(x)$ ($x \in X$)」等と表される. (これらの式は**恒等式**ともいわれる. 尚, 等式の後ろの () 内は等号が成り立つ範囲を表す.)

関数のグラフ 関数や写像 $f: X \rightarrow Y$ のグラフ (graph) とは集合 $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ のことで, 1変数関数 $f(x)$ のグラフは平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合, 2変数関数 $f(x, y)$ のグラフ $\{(x, y, f(x, y)) \mid x \in X\}$ は空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合で, f が “良い” 関数のときはそれぞれ平面曲線, 空間内の曲面になる.

一般的な注意

・**文字の使い方** 数学における一連の文脈中, 断りなく最初に出てきた文字は任意の対象を指し, 同じ文字が出てくれば最初に出てきた文字と同じものを表す, とされる. (ここまでは理解されていると思う.) 従って, (最終的に等しくなることもあるが) 一般に異なる対象を表すときは, **文字を変える** 必要がある.

・**等号「=」の意味** 等号は, 2つの対象が「等しい」こと (相等) を表すときに用いられるが, 「2つの対象が等しい」は対象によって個別に定義されているので, 「=」が何を意味しているかを意識しておく必要がある. また例えば, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ や $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ は**恒等式**を表すが, $x^2 - 2x + 1 = 0$ は**方程式** (等号が成り立つ様な x を求める) を表している様に意味が異なる式を等号「=」を用いて表しており, 他に $f(x) = x^2 + 1$ の様な**定義式** (左辺を右辺で定義する) もあるので注意が必要である.

これらを区別する為に, 恒等式には (合同と同じ) 記号「 $\equiv$ 」を用いたり, 定義式には 「 $:=$ ($\equiv$)」 (左辺を右辺で (左辺で右辺を) 定義する) を用いて表すこともある. また方程式には 「方程式 $f(x) = 0$ 」の様に 「方程式」と断りを入れて表される.

・以下, f は関数を表すとし, 1, 2, 3, n 変数関数は $f(x), f(x, y), f(x, y, z), f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 纏めて $f(\mathbf{x})$ と表す.

関数の収束・極限 高校では, 「 $f(x)$ において, x が a と異なる値を取りながら限りなく a に近づくとき, $f(x)$ の値が α に限りなく近づくならば $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ または, $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow \alpha$ と表し, α を極限值という. また, $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は α に収束する, という.」とされた.

$x \rightarrow a$ は $|x - a| \rightarrow 0$ と, $f(x) \rightarrow \alpha$ は $|f(x) - \alpha| \rightarrow 0$ と同値であり, $|x - a|$ は x と a の間の距離を表している. 多変数の場合, $\mathbf{x}, \mathbf{a}$ 間の距離は, ベクトルの長さ (大きさ) $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ($= \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 等) を用いて $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|$ と表されるので, 多変数関数では:

$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{a}) = \alpha$ とは, $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \rightarrow 0$ ($\mathbf{x}, \mathbf{a}$ 間の距離が限りなく 0 に近づく) のとき $|f(\mathbf{x}) - \alpha| \rightarrow 0$

と考える. 「距離が限りなく 0 に近づく」は曖昧な表現なので, 数学ではこれを次の「 ε - δ 論法」を用いて定義する.