補足: Mayer-Vietoris 完全列を用いた計算例

$A_1, A_2 \subset X$ で, $\{A_1, A_2\}$ が切除対なら次の列は完全 :

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} H_n(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} H_n(A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \cdots$$

$X = A_1 \cup A_2,\ A_0 := A_1 \cap A_2$ とし, $H_*(A_i)$ $(i=0,1,2)$ から $H_*(X)$ を求めることを考える.
• X が $(C^1\text{-})n$-多様体, A_0 が $(C^1\text{-})(n-1)$-閉部分多様体で, A_1, A_2 が境界 A_0 をもつ n-多様体のとき (X を A_0 で切ったとき), $\{A_1, A_2\}$ は切除対であり, X の単体分割で A_0 が部分複体となるものがある. (図)

例 0 $X = A_1 \coprod A_2$ (非交和空間) のとき, $A_0 := A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $H_*(A_0) = 0$ より,
$0 = H_n(A_0) \to H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A_0) = 0$ (完全)　よって $H_*(X) \cong H_*(A_1) \oplus H_*(A_2)$.

例 1 (球面 S^n $(n=0,1,2\cdots)$, $S^0 \subset S^1 \subset \cdots \subset S^n$) $n=0$ のとき $S^0 =$ 2 点. 例 0 より,

$$H_k(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \implies H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

以下, 点 $p \in S^n$, 一点空間 $\{p\}$, 特異 0-単体 $\Delta^0 \to \{p\}$, 及びそのホモロジー類を全て p で表す.
$a_\pm = \pm 1 \in S^0$ とすると,　$H_0(S^0) = \mathbb{Z}\langle a_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle a_- \rangle$.
$n \geqq 1$ のとき S^n を上下の半球面 $S^n_\pm$ $(= A_1, A_2)$ に分け ($S^n = S^n_+ \cup S^n_-,\ S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$), $p_\pm = p^n_\pm$ を北極, 南極とする ($p_\pm \in S^n_\pm$). $S^n_\pm \simeq p_\pm$ (ホモトピー同値) より $H_k(S^n_\pm) = 0$ $(k \neq 0)$,　$H_0(S^n_\pm) = \mathbb{Z}\langle p_\pm \rangle$.
次の M-V 完全列を考える ($k \geqq 1$):

$$0 = H_k(S^n_+) \oplus H_k(S^n_-) \to H_k(S^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(S^{n-1}) \to H_{k-1}(S^n_+) \oplus H_k(S^n_-) \to H_{k-1}(S^n) \to \cdots$$

$k \geqq 2$ で $H_{k-1}(S^n_+) \oplus H_{k-1}(S^n_-) = 0$ より $0 \to H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1}) \to 0$ (完全).

$$\therefore\ H_k(S^n) \cong H_{k-1}(S^{n-1}) \quad (k \geqq 2,\ n \geqq 1).$$

$\therefore$ $k \geqq 1$ で　$0 = H_k(S^0) \cong H_{k+1}(S^1) \cong \cdots \cong H_{k+n}(S^n)$.　即ち, $H_k(S^n) = 0$ $(k \geqq n+1)$.
$(k=n)$　$H_1(S^1) \cong H_2(S^2) \cong \cdots \cong H_n(S^n)$.
$(0<k<n)$　$H_k(S^n) \cong \cdots \cong H_1(S^{n-k+1})$　$(n-k+1 \geqq 2)$.
従って S^n $(n \geqq 1)$ の H_1 (と H_0) を求めれば球面のホモロジー群は決定できる.
(S^n $(n \geqq 1)$ は弧状連結より　$H_0(S^n) = \mathbb{Z}\langle p \rangle$ $(\forall p \in S^n)$　だが, M-V 列を用いても示せる.)

$$H_1(S^1):\ 0 \to H_1(S^1) \xrightarrow{\partial_*} \underset{\mathbb{Z}\langle a_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle a_- \rangle}{\overset{H_0(S^0)}{\|}} \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \underset{\mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle}{\overset{H_0(S^1_+) \oplus H_0(S^1_-)}{\|}} \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} H_0(S^1) \to 0$$

$i_{1*}(a_\pm) = p_+,\ i_{2*}(a_\pm) = p_-$ より $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle a_+ - a_- \rangle \cong H_1(S^1)$.　$\therefore$ $H_n(S^n) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.
($H_0(S^1) \cong (\mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle)/\,\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}$ $^{(*)}$. $H_0(S^n) = \mathbb{Z}\langle a_+ \rangle$ とする.)

$$H_1(S^n)\ (n \geqq 2):\quad 0 \to H_1(S^n) \xrightarrow{\partial_*} \underset{\mathbb{Z}\langle a_+ \rangle}{\overset{H_0(S^{n-1})}{\|}} \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \underset{\mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle}{\overset{H_0(S^n_+) \oplus H_0(S^n_-)}{\|}} \xrightarrow{j_{1*}-j_{2*}} H_0(S^n) \to 0$$

において $i_{1*}(a_+) = p_+,\ i_{2*}(a_+) = p_-$ より $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = 0$, $\therefore$ $\partial_* = 0$,　$\therefore$ $H_1(S^n) = 0$.
(なお, $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle)/\,\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}$ より帰納的に $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ が分かる.)
以上を纏めると,

$$n \geqq 1:\quad H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0,n) \\ 0 & (k \neq 0,n) \end{cases}, \qquad (n=0:)\quad H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

$(*)$: $(\mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle)/\,\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle (p_+,0), (0,p_-) \rangle / \mathbb{Z}\langle (p_+,p_-) \rangle = \mathbb{Z}\langle (p_+,0), (p_+,p_-) \rangle / \mathbb{Z}\langle (p_+,p_-) \rangle$
$= \mathbb{Z}\langle\, \overline{(p_+,0)}\, \rangle \cong \mathbb{Z}$.
なお, $(p_+,0)$ を p_+, $(0,p_-)$ を p_-, (p_+,p_-) を $p_+ + p_-$ と表わすこともある. このときは
$(\mathbb{Z}\langle p_+ \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle p_- \rangle)/\,\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle p_+, p_- \rangle / \mathbb{Z}\langle p_+ + p_- \rangle = \mathbb{Z}\langle p_+,\ p_+ + p_- \rangle / \mathbb{Z}\langle p_+ + p_- \rangle = \mathbb{Z}\langle \overline{p_+} \rangle \cong \mathbb{Z}$.
(同様の計算は次頁にも出てくる.)

例 2 (種数 g ($\geqq 1$) の向き付け可能な閉曲面 Σ_g ($g=1$ は Torus T^2)) (図)
$X := \Sigma_g$ を「横置き」にして「横割り」にする.
境界 A_0 は, 外側の円周 S^1_0 と内側の g 個の円周 $S^1_1, \dots, S^1_g$ の非交和空間で, $H_*(A_0) \cong H_*(S^1_0) \oplus \cdots \oplus H_*(S^1_g)$.
全ての円周を同じ向きを付け, それらの表わすホモロジー類を $a_0, \dots, a_g$ とすると, $H_1(A_0) = \mathbb{Z}\langle a_0, \dots, a_g \rangle$.
$v_i \in S^1_i$ $(i = 0, 1, \dots, g)$ を取り, $H_0(A_0) = \mathbb{Z}\langle v_0, \dots, v_g \rangle$ とする. $H_k(A_0) = 0$ $(k \geqq 2)$ である.
上下の A_1, A_2 はそれらの中を埋めたもので, 内側の g 個の円周の一点和にホモトピー同値なので (又は単体分割して求めれば),
$H_1(A_1) = \mathbb{Z}\langle a'_1, \dots, a'_g \rangle,\ H_1(A_2) = \mathbb{Z}\langle a''_1, \dots, a''_g \rangle.\ \ H_0(A_1) = \mathbb{Z}\langle v'_1 \rangle,\ H_0(A_2) = \mathbb{Z}\langle v''_1 \rangle.$
$k \geqq 2$ のとき $H_k(A_i) = 0$ なので M-V 列は

$$0 \to H_2(X) \xrightarrow{\partial^*} H_1(A_0) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_1(A_1) \oplus H_1(A_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_1(X) \xrightarrow{\partial_*} H_0(A_0) \to H_0(A_1) \oplus H_0(A_2) \to H_0(X) \to 0$$

(H_1 で) $i_{1*}(a_j) = a'_j,\ i_{2*}(a_j) = a''_j$ $(j = 1, \dots, g)$, $i_{1*}(a_0) = \sum_{j=1}^g a'_j,\ i_{2*}(a_0) = \sum_{j=1}^g a''_j$ より
$\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle \sum_{j=1}^g a_j - a_0 \rangle \cong \mathbb{Z}.\ \therefore\ H_2(X) \cong \mathbb{Z}.$
$\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle (a'_1, a''_1), \dots, (a'_g, a''_g) \rangle \cong \mathbb{Z}^g.$ $(H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)) / \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}^g.$ (前頁 $(*)$ と同様.)
(H_0 で) $i_{1*}(v_j) = v'_1,\ i_{2*}(v_j) = v''_1$ $(j = 0, \dots, g)$ より $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle v_1 - v_0, \dots, v_g - v_0 \rangle \cong \mathbb{Z}^g$.
$\mathrm{Ker}\,(j_{1*} - j_{2*}) = \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle (v'_1, v''_1) \rangle \cong \mathbb{Z}.\ \therefore H_0(X) \cong \mathbb{Z}\langle v'_1, v''_1 \rangle / \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}.$
$H_1(X)$: $\mathrm{Ker}\,(j_{1*} - j_{2*}) = \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*})$ より $(H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)) / \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*})$ $(\cong \mathbb{Z}^g) \to H_1(X)$ は単射.
$\mathrm{Im}\,[\partial_* : H_1(X) \to H_0(A_0)] = \mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) \cong \mathbb{Z}^g$ より
$0 \to (H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)) / \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) \to H_1(X) \to \mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) \to 0,\ \therefore 0 \to \mathbb{Z}^g \to H_1(X) \to \mathbb{Z}^g \to 0$
は完全. $\mathbb{Z}^g$ は自由加群なのでこの列は分裂して, $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g = \mathbb{Z}^{2g}$. 以上を纏めると,

$$H_k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 2) \\ \mathbb{Z}^{2g} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1, 2) \end{cases}$$

例 3 (実射影平面 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$) $X = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ から円盤 $A_1 \approx B^2$ (の内部) を取り除くと残りの A_2 は Möbius の帯になり, その境界 A_0 は円周 S^1 になる. 即ち, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ は円盤 A_1 と Möbius の帯 A_2 をその境界の円周 A_0 で張り合わせたものである. Möbius の帯 A_2 は中心の円周にホモトピー同値 (DR) で, 円盤 A_1 は可縮なので,

$$H_k(A_0) \cong H_k(A_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0, 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases} \qquad H_k(A_1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

$H_1(A_0) = \mathbb{Z}\langle a \rangle,\ H_1(A_2) = \mathbb{Z}\langle b \rangle,\ H_0(A_0) = \mathbb{Z}\langle v \rangle,\ H_0(A_1) = \mathbb{Z}\langle v' \rangle,\ H_0(A_2) = \mathbb{Z}\langle v'' \rangle$ とする.
A_0 の向き (a) と A_2 の中心の円周の向き (b) は同じとする. このとき, $i_2(A_0)$ は A_2 の境界の円周だからこれを中心の円周に縮めると二重巻になる. 即ち, $i_{2*}(a) = 2b \in H_1(A_2)$. ここで上の M-V 列を考える:
(H_1 で,) $i_{1*}(a) = 0,\ i_{2*}(a) = 2b$ より $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = 0$ $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\partial_* = 0,\ H_2(X) = 0.$
$\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle (0, 2b) \rangle.$ $(H_1(A_1) \oplus H_1(A_2)) / \mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = 0 \oplus \mathbb{Z}\langle b \rangle / \mathbb{Z}\langle (0, 2b) \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\langle \bar{b} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$
(H_0 で,) $i_{1*}(v) = v',\ i_{2*}(v) = v''$ より $\mathrm{Ker}\,(i_{1*}, i_{2*}) = 0.$ $\therefore$ $\mathrm{Im}\,\partial_* = 0.$ $0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to H_1(X) \xrightarrow{\partial_*} 0.$
$\therefore$ $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$ $H_0(X)$ は前と同様に, 又は弧状連結より $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. 以上より

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases} \qquad \left(H_k(\text{Klein の壺}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k = 0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (k = 1) \\ 0 & (k \neq 0, 1) \end{cases} \right)$$

Klein の壺 X は 2 つの Möbius の帯 A_1, A_2 を境界の円周 A_0 で張り合わせたものなので同様に計算出来る:
H_1 は $\mathrm{Im}\,(i_{1*}, i_{2*}) = \mathbb{Z}\langle (2b, 2b') \rangle$ より, $H_1(K) \cong \mathbb{Z}\langle b, b' \rangle / 2\mathbb{Z}\langle b + b' \rangle = \mathbb{Z}\langle b, b + b' \rangle / 2\mathbb{Z}\langle b + b' \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$
例 4(Σ_g のホモロジー群の別証, CW 複体のホモロジー群の考え方) 簡単の為, 2-Torus T^2 について述べる. $X := T^2$ は四角形 (Σ_g では正 $4g$ 角形) の辺を同一視して得られた. これを円盤 A_1 と残り A_2 を境界の円周 A_0 で張り合わせたものと考える. A_2 は辺を同一視したもの X^1 (X の 1-切片) とホモトピー同値 (DR) であり, X^1 は 2 個 ($2g$ 個) の円周を 1 点でくっつけたもの (1 点和という) になっている.
$H_1(A_0) = \mathbb{Z}\langle c \rangle,\ H_1(A_2) \cong H_1(X^1) = \mathbb{Z}\langle a, b \rangle$ とすると, c は向きを付けた円周, a, b は X^1 の向きを付けた円周の表すホモロジー類, $i_{2*}(c)$ は同一視する前の辺を一周して商空間 X^1 に射影した特異 1-単体で代表されるホモロジー類と考えられる. 即ち, $i_{2*}(c) = a + b - a - b = 0 \in H_1(A_2)$. H_1 で $(i_{1*}, i_{2*}) = 0$.
$\therefore H_2(T^2) \cong H_1(A_0) \cong \mathbb{Z}$. 例 3 と同様 H_0 で (i_{1*}, i_{2*}) は単射, $\mathrm{Im}\,\partial_* = 0$ より $H_1(T^2) \cong H_1(A_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.