

3.7 単体の重心細分と切除同型 2(命題 3.6.4) の証明

3.7.0 序 (切除対の定義と切除同型 2 再掲)

定義 3.6.1 部分空間 $A, B \subset X$ の対 $\{A, B\}$ が **切除 (可能) 対 (excisive pair)** とは 包含写像

$$i: C_*(A) + C_*(B) \hookrightarrow C_*(A \cup B), \quad C_n(A) + C_n(B) = \{a + b \in C_n(A \cup B) \mid a \in C_n(A), b \in C_n(B)\}$$

が ホモロジー群の同型を誘導するとき. 特に chain 同値であればよい.

i は一般には同型にはならない. 特異単体 $\sigma: \Delta^n \rightarrow A \cup B$ で $\sigma(\Delta^n) \not\subseteq A, B$ となるものがある可能性があるから. しかし次のときは chain homotopy 逆写像 $r: C_*(A \cup B) \rightarrow C_*(A) + C_*(B)$ が構成出来る.

命題 3.6.4 (切除同型 2) $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ ($\mathring{A}$ は A の内部) のとき $\{A, B\}$ は 切除対. 即ち

$$i: C_*(A) + C_*(B) \hookrightarrow C_*(X) \quad \text{は chain 同値}$$

一般には $X = \bigcup_{\lambda} \mathring{A}_{\lambda}$ なる $\mathcal{A} = \{A_{\lambda}\}$ に対し, $\sum_{\lambda} C_*(A_{\lambda}) \hookrightarrow C_*(X)$ は chain 同値.

r を構成する為には $\sigma: \Delta^n \rightarrow A \cup B$ で $\sigma(\Delta^n) \not\subseteq A, B$ となるものを chain $\sum_i m_i \sigma_i$ に細分して各 σ_i の像が A, B いずれかに含まれる様にし, さらに σ と $\sum_i m_i \sigma_i$ をつなぐ chain homotopy を構成すれば良い. ここで σ_i は, Δ^n を細分したときの小単体 s_i に σ を制限したものを特異単体と考えた $\sigma \sigma_{s_i}$ である. この証明は以下の順で行われる.

1. 単体の重心細分.
2. 特異単体 σ の重心細分と chain homotopy の構成.
3. 重心細分の繰り返しと命題の証明.

3.7.1 単体の重心細分 (barycentric subdivision)

n -単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ の **重心 (barycenter)** は

$$\hat{s} = b_s := \frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{n+1}.$$

例 $n=0$: $\hat{s} = a_0$, $n=1$: $\hat{s} = a_0, a_1$ の中点, $n=2$: $\hat{s}$ = 三角形 s の重心. (図)

定義 3.7.1 $s > s'$ ($s' < s$) : s' は s の部分単体. (ここでは $s' \neq s$ とする.)

定義 3.7.2 n -単体 s の **重心細分**とは s の部分単体の列 $s_0 > s_1 > \cdots > s_k$ の重心列で張られる単体

$$\hat{s}_0 \hat{s}_1 \cdots \hat{s}_k$$

全体からなる単体複体 $Sd s$ のこと. 頂点の順序は上の様に s_i の次元の降順に並んでいるとする.

(1 つの n -単体は $(n+1)!$ 個の 小 n -単体に分割される.)

なお, 単体複体 K の **重心細分** $Sd K$ は

$$Sd K := \bigcup_{s \in K} Sd s$$

$s \in C_n(K)$ を細分された小単体の chain として表す為に単体 s が重心を頂点とする境界 ∂s の錐体になっていることを利用する.

(chain の錐とその境界) k -単体 $s = a_0 \cdots a_k$ と頂点 b に対し, $ba_0 \cdots a_k$ が $(k+1)$ -単体を張るとき $bs = ba_0 \cdots a_k$ とし, k -chain $c = \sum_i m_i s_i$ に対し, $(k+1)$ -chain bc を $bc = \sum_i m_i bs_i$ (c の錐) とする.

$$k > 0 \text{ のとき } \partial(bc) = c - b(\partial c), \quad \left(k = 0 \text{ のとき } \partial(bc) = c - \left(\sum_i m_i \right) b \right) \quad (1)$$

が成り立つ. (chain c の錐 bc の境界は, 底面 c と側面 $b(\partial c)$ の差.) (但し, $c=0$ のときは $b0=0$ とする.)

定義 3.7.3 (重心細分作用素=単体を細分された小単体の chain として表す chain map Sd)

$Sd = \{Sd_n : C_n(K) \rightarrow C_n(Sd K)\}$ を単体 $s = s_n = a_0 \cdots a_n$ の次元に関して帰納的に次で定義する:

$$\begin{aligned} n=0 \quad Sd_0 s_0 &= Sd_0 a_0 = a_0, \\ n>0 \quad Sd_n s_n &= b_s(Sd_{n-1} \partial s_n). \quad \text{従って} \\ n=1 \quad Sd_1 s_1 &= Sd_1 a_0 a_1 = b_s(Sd_0 \partial s_1) = b_s(a_1 - a_0) = -b_s a_0 + b_s a_1 \\ n=2 \quad Sd_2 s_2 &= Sd_2 a_0 a_1 a_2 = b_s(Sd_1 \partial s_2) = b_s(Sd_1 \partial^0 s) - b_s(Sd_1 \partial^1 s) + b_s(Sd_1 \partial^2 s) \\ &= b_s(Sd_1 a_0 a_1) + b_s(Sd_1 a_2 a_0) + b_s(Sd_1 a_1 a_2) \end{aligned}$$

補題 3.7.1 $Sd = \{Sd_n : C_n(K) \rightarrow C_n(Sd K)\}$ は chain map

証明 $\partial(bc) = c - b(\partial c)$ より帰納的に,

$$\begin{aligned} \partial(Sd_0 a_0) &= 0, \\ \partial(Sd_1 s) &= \partial(b_s(Sd_0 \partial s)) = Sd_0(\partial s) - b_s(\partial(Sd_0 s)) = Sd_0(\partial s), \\ &\vdots \\ \partial(Sd_n s) &= \partial(b_s(Sd_{n-1} \partial s)) = Sd_{n-1}(\partial s) - b_s(\partial(Sd_{n-1} \partial s)) \\ &= Sd_{n-1}(\partial s) - b_s(Sd_{n-1} \partial \partial s) = Sd_{n-1}(\partial s) \end{aligned}$$

定義 3.7.4 単体 s と chain $c = \sum_i m_i s_i$ ($\neq 0$) の直径 $d(s)$ と $d(c)$ を

$$d(s) := \sup_{x,y \in s} d(x,y) = \sup_{x,y \in s} \|x - y\|, \quad d(c) := \max_i d(s_i),$$

と定める. (s は compact だから $\sup d(x,y) = \max d(x,y)$. 標準単体の直径は $d(\Delta^n) = \sqrt{2}$.)

補題 3.7.2 n -単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ と $x, y \in s$ に対し

1. $d(x,y) \leq \max_{0 \leq i \leq n} d(x, a_i)$, $d(s) = \max_{0 \leq i < j \leq n} d(a_i, a_j)$. (s の直径 = 頂点間の距離の最大値)
2. $d(Sd s) \leq \frac{n}{n+1} d(s)$.

証明 (1) $y = \sum_{i=0}^n y_i a_i$, $\sum_{i=0}^n y_i = 1$, $y_i \geq 0$ と表すと:

$$d(x,y) = \left\| \left(\sum_{i=0}^n y_i \right) x - \sum_{i=0}^n y_i a_i \right\| \leq \sum_{i=0}^n y_i \|x - a_i\| \leq \sum_{i=0}^n y_i \max_{0 \leq j \leq n} \|x - a_j\| = \max_{0 \leq j \leq n} d(x, a_j).$$

$\therefore$ 前半が成立. 再度これを x にも適用すれば

$$d(x,y) \leq \max_{0 \leq i \leq n} d(x, a_i) \leq \max_{0 \leq i \leq n} \max_{0 \leq j \leq n} d(a_i, a_j). \quad \therefore d(s) = \max_{0 \leq i < j \leq n} d(a_i, a_j).$$

(2) s の重心 $b_s = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a_i$ と頂点 a_j に対し

$$\|b_s - a_j\| = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} (a_i - a_j) \right\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} \|a_i - a_j\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i \neq j} d(s) = \frac{n}{n+1} d(s).$$

(1) より $d(b_s, y) \leq \max_j d(b_s, a_j) \leq \frac{n}{n+1} d(s)$, ($y \in s$). 特に辺単体の重心 y に対しこれが成立. 一方, $d(\partial s) = \max d(a_i, a_j) = d(s)$ と n に関する帰納法により ($n=0$ では $d(Sd s) = d(s) = 0$.)

$$d(Sd \partial s) \leq \frac{n-1}{n} d(\partial s) = \frac{n-1}{n} d(s) < \frac{n}{n+1} d(s) \quad (n \geq 1) \quad (\because n^2 - (n+1)(n-1) = 1 > 0)$$

以上より 重心間の距離はいずれも $\frac{n}{n+1} d(s)$ 以下となり (1) より (2) が成立.

この補題により, 重心細分を繰り返せば, 細分された小単体の直径はいくらでも小さくできる.

3.7.2 特異単体の重心細分と chain homotopy

$s \in K_n$ に対し, $Sd_n s \in C_n(Sd K)$ は

$$Sd_n s = \sum_i m_i s_i, \quad s_i \in Sd_n K, \quad (m_i = \pm 1, \quad 1 \leq i \leq (n+1)!) \quad (2)$$

と書ける. s, s_i を特異単体 σ_s, σ_{s_i} とみなすとき, $|Sd K| = |K|$ なので,

$$\sigma_s : \Delta^n \xrightarrow{\cong} |s| \hookrightarrow |K|, \quad \sigma_{s_i} : \Delta^n \xrightarrow{\cong} |s_i| \hookrightarrow |Sd K| = |K|, \quad Sd_n \sigma_s = \sum_i m_i \sigma_{s_i} \in C_n(|K|)$$

とみなされる. 特に, $|K| = \Delta^n, s = \Delta^n$ (標準 n -単体) のときは $\sigma_s = 1_{\Delta^n}$ で,

$$Sd_n 1_{\Delta^n} = \sum_i m_i \sigma_{s_i} \in C_n(\Delta^n) \quad (s_i \text{ は } \Delta^n \text{ の細分された小単体}).$$

これを用いて, 特異単体 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ の重心細分を

$$Sd_n \sigma := \sigma_{\#}(Sd_n 1_{\Delta^n}) = \sigma_{\#}\left(\sum_i m_i \sigma_{s_i}\right) = \sum_i m_i (\sigma \sigma_{s_i}) \in C_n(X)$$

と定義する. ($\sigma_{\#} : C_*(\Delta^n) \rightarrow C_*(X)$ は chain map で, $\sigma \sigma_{s_i} : \Delta^n \xrightarrow{\cong} |s_i| \hookrightarrow \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$.)

$\sigma \sigma_{s_i}(\Delta^n) = \sigma(s_i)$ であり, σ_{s_i} により Δ^n と s_i を同一視すれば $Sd_n \sigma = \sum_i m_i \sigma|_{s_i}$. このとき補題 3.7.1 より $\partial Sd_n \sigma \equiv \partial \sigma_{\#}(Sd_n 1_{\Delta^n}) = \sigma_{\#}(Sd_{n-1} \partial 1_{\Delta^n}) = \sum_i m_i (\sum_j (-1)^j \partial^j \sigma \sigma_{s_i}) = Sd_{n-1} \partial \sigma$. よって,

補題 3.7.3 $Sd = \{Sd_n\} : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ は chain map.

(注) $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ が単体を張らず, 単に $\mathbb{R}^N$ の点列であっても 特異単体 σ_s は同じ式で定義される. 特に (単体にならない) 点列 $b_s s$ に対し, 特異単体 $\sigma_{b_s s}$ が定義される.

以下, $s \subset \Delta^n$ (単体) とし, $\sigma_s, \sigma_{b_s s}$ などは (見難いこともあり) 単に $s, b_s s$ などと表す.

Chain homotopy $Sd \simeq 1$: $\bar{h} = \{\bar{h}_n\}$ を $\partial \bar{h}_n s = s - Sd_n s - \bar{h}_{n-1} \partial s$ となる様に帰納的に定める:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{-1} &= \bar{h}_0 := 0, \quad \bar{h}_1(s) = b_s(s - Sd_1 s - \bar{h}_0 \partial s) (= b_s(s - Sd s)), \dots, \\ \bar{h}_n(s) &:= b_s(s - Sd_n s - \bar{h}_{n-1} \partial s) \end{aligned}$$

また, $h = \{h_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)\}$ を特異単体 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ に対し, $h_n(\sigma) := \sigma_{\#}(\bar{h}_n(1_{\Delta^n}))$ と定める.

補題 3.7.4 $h = \{h_n\}$ は chain homotopy $h : Sd \simeq 1 : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ を与える.

証明 $\bar{h} = \{\bar{h}_n\}$ について $\partial \bar{h}_n + \bar{h}_{n-1} \partial = 1 - Sd$ が成り立つことを帰納法で示す.

$k = 0$: $\bar{h}_0 = \bar{h}_{-1}(0) = 0, Sd s = s$ なので $\partial \bar{h}_0(s) + \bar{h}_{-1} \partial(s) = 0, (1 - Sd)(s) = 0$ より成立.

$k \geq 0$ のとき, 帰納的に k まで $\partial \bar{h}_k + \bar{h}_{k-1} \partial = 1 - Sd$ が成立すると仮定.

$$\begin{aligned} \partial \bar{h}_{k+1}(s) + \bar{h}_k \partial(s) &\equiv \partial(b_s(s - Sd s - \bar{h}_k \partial s)) + \bar{h}_k \partial s \quad (\partial(bc) = c - b \partial c \text{ より}) \\ &= (s - Sd s - \bar{h}_k \partial s) - b_s(\partial(s - Sd s - \bar{h}_k \partial s)) + \bar{h}_k \partial s \\ &= s - Sd s - b_s(\partial s - \partial Sd s - \partial \bar{h}_k \partial s) \quad (\partial \bar{h}_k = 1 - Sd - \bar{h}_{k-1} \partial \text{ より}) \\ &= s - Sd s - b_s(\partial s - Sd \partial s - (\partial s - Sd \partial s - \bar{h}_{k-1} \partial \partial s)) \quad (\partial \partial s = 0 \text{ より}) \\ &= s - Sd s \end{aligned}$$

$h = \{h_n\}$ について, $s = 1_{\Delta^n}$ とすると, $\sigma_{\#}$ が chain map なので, $\bar{h} = \{\bar{h}_n\}$ の結果より

$$\partial h_n(\sigma) \equiv \partial \sigma_{\#}(\bar{h}_n(1_{\Delta^n})) = \sigma_{\#} \partial(\bar{h}_n(1_{\Delta^n})) = \sigma_{\#}(1 - Sd - \bar{h}_{n-1} \partial)(1_{\Delta^n}) = (1 - Sd - h_{n-1} \partial)(\sigma)$$

よって, $h = \{h_n\}$ は chain homotopy.

k 回重心細分作用素 Sd^k を $Sd^k := Sd^{k-1} \circ Sd$ ($Sd^0 = 1, Sd^1 = Sd$) と定義する. これは chain map. chain homotopy $Sd^k \simeq 1$ を定義する為に, $h^1 : f^0 \simeq f^1 : C \rightarrow C', h^2 : g^0 \simeq g^1 : C' \rightarrow C''$ ならば $h : g^0 f^0 \simeq g^1 f^1$ が $h := g^1 h^1 + h^2 f^0$ で与えられる (計算すれば分る) ことを繰り返し用いて,

補題 3.7.5 $h^k = \{h_n^k : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)\}$ を次式で定義すると chain homotopy $h^k : Sd^k \simeq 1$ になる.

$$h_n^k(\sigma) := \sum_{0 \leq i < k} h_n Sd^i(\sigma)$$

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \partial(h_n^k(\sigma)) &= \sum_{0 \leq i < k} \partial h_n Sd^i(\sigma) = \sum_{0 \leq i < k} (1 - Sd - h_{n-1} \partial)(Sd^i \sigma) \\ &= \sum_{0 \leq i < k} (Sd^i \sigma - Sd^{i+1} \sigma) - \sum_{0 \leq i < k} h_{n-1} Sd^i(\partial \sigma) = \sigma - Sd^k \sigma - h_{n-1}^k(\partial \sigma) \end{aligned}$$

3.7.3 重心細分の繰り返しと定理の証明

補題 3.7.6 (ルベーク数の定理) コンパクト距離空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対し, (ルベーク数といわれる) 正の数 $\delta = \delta(\mathcal{U}) > 0$ が存在して, 直径が δ より小さい部分集合 A はある $U \in \mathcal{U}$ に含まれる. 即ち

$$A \subset X, \quad d(A) < \delta(\mathcal{U}) \implies \exists U \in \mathcal{U} \text{ s.t. } A \subset U$$

[証明の概略] X の有限部分被覆 $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$, $X = \cup U_i$ を選び. d を X の距離関数として,

$$f_i(x) = d(x, X - U_i), \quad f(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x), \quad \delta(\mathcal{U}) = \frac{1}{n} \min f(x)$$

とする. $\forall x \exists i (x \in U_i) \therefore f(x) \geq f_i(x) > 0$, また $\forall a \in A \exists j f_j(x) = d(a, X - U_j) \geq \delta$ となる. $\square$

[命題 3.6.4 の証明] $\sigma : \Delta^n \rightarrow A \cup B$ で $\sigma(\Delta^n) \not\subset A, B$ となるものについて, Δ^n の開被覆 $\{\sigma^{-1}(\overset{\circ}{A}), \sigma^{-1}(\overset{\circ}{B})\}$ のルベーク数を $\delta(\sigma)$ とする. (一般には開被覆 $\{\overset{\circ}{A}_\lambda\}$ のルベーク数を $\delta(\sigma)$ とする.) このとき, 補題 3.7.2 より

$$d(Sd^k(\Delta^n)) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^k d(\Delta^n) < \delta(\sigma) \quad (d(\Delta^n) = \sqrt{2})$$

となる k がある. $Sd^k(\Delta^n) = \sum m_i s_i$ と表すと $d(s_i) < \delta$. よって, ルベーク数の定理 (補題 3.7.6) より $s_i \subset \sigma^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \sigma^{-1}(A)$ または $s_i \subset \sigma^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \sigma^{-1}(B)$, 即ち, $\sigma(s_i) \subset A$ または $\sigma(s_i) \subset B$. よって

$$Sd^k(\sigma) = \sum_i m_i \sigma \sigma_{s_i} \in C_n(A) + C_n(B) \quad (\text{一般には } Sd^k(\sigma) \in \sum_\lambda C_n(A_\lambda))$$

となる k がある. この様な k の最小値を $m(\sigma)$ とする. ($\sigma(\Delta^n) \subset A$ or B のときは $m(\sigma) = 0$.) この時 σ の各 face $\partial^i \sigma$ について $m(\partial^i \sigma) \leq m(\sigma)$.

Chain homotopy: $\tilde{h} = \{\tilde{h}_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)\}$ を $\tilde{h}_n(\sigma) := h_n^{m(\sigma)}(\sigma)$ と定めると補題 3.7.5 より,

$$\begin{aligned} \partial \tilde{h}_n(\sigma) + \tilde{h}_{n-1}(\partial \sigma) &= (\sigma - Sd^{m(\sigma)} \sigma - h_{n-1}^{m(\sigma)}(\partial \sigma)) + \sum_{i=0}^n (-1)^i h_{n-1}^{m(\partial^i \sigma)}(\partial^i \sigma) \\ &= \sigma - Sd^{m(\sigma)} \sigma - \sum_{i=0}^n (-1)^i (h_{n-1}^{m(\sigma)} - h_{n-1}^{m(\partial^i \sigma)})(\partial^i \sigma) = \sigma - Sd^{m(\sigma)} \sigma - \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{k=m(\partial^i \sigma)}^{m(\sigma)-1} h_{n-1} Sd^k(\partial^i \sigma) \end{aligned}$$

Chain homotopy inverse: $r = \{r_n : C_n(X) \rightarrow C_n(X)\}$ を $r_n := 1 - \partial \tilde{h}_n - \tilde{h}_{n-1} \partial$ と定めると,

$$r_n(\sigma) \equiv \sigma - (\partial \tilde{h}_n(\sigma) + \tilde{h}_{n-1}(\partial \sigma)) = Sd^{m(\sigma)} \sigma + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{k=m(\partial^i \sigma)}^{m(\sigma)-1} h_{n-1} Sd^k(\partial^i \sigma)$$

右辺は $r_n(\sigma) \in C_n(A) + C_n(B)$ を表しており, $\sigma \in C_n(A) + C_n(B) \Rightarrow m(\sigma) = m(\partial^i \sigma) = 0 \therefore r_i(\sigma) = 1$.

$$\partial r_n(\sigma) \equiv \partial \sigma - \partial \partial \tilde{h}_n(\sigma) - \partial \tilde{h}_{n-1}(\partial \sigma) = \partial \sigma - \partial \tilde{h}_{n-1}(\partial \sigma) \quad (-\tilde{h}_{n-2}(\partial \partial \sigma)) = r_{n-1}(\partial \sigma)$$

より chain map で $1 - r_n = \partial \tilde{h}_n + \tilde{h}_{n-1} \partial$ より $ir = r \simeq 1$. よって r は i の chain homotopy inverse. $\square$