

3.6 切除同型 (excision)

3.6.1 切除定理

位相空間対のホモロジー論において切除公理は次の通りである.

A6 (切除公理) 位相空間対 (X, A) と X の開集合 U に対し, $\bar{U} \subset \mathring{A}$ (U の閉包が A の内部に含まれる) ならば, 包含写像 $e: (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$ はホモロジー群の同型 (切除同型という) を誘導する:

$$e_*: H_n(X-U, A-U) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A) \quad (\text{同型}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$B := X-U$ とおけば $A-U = A \cap B$, $\mathring{B} = X-\bar{U}$ で, $\bar{U} \subset \mathring{A} \Leftrightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} = X$ より切除公理は次の形になる.

$A, B \subset X$ が $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$ をみたし B が閉集合ならば $e_*: H_n(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(A \cup B, A)$

特異ホモロジー群においては (閉集合条件を外した) これより少し強い 次の定理が証明できる:

定理 3.6.1 (切除定理) 位相空間 X の部分空間 A, B が $\mathring{A} \cup \mathring{B} = A \cup B$ をみたすならば, 包含写像 $e: (A, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, B)$ は特異ホモロジー群の同型 (切除同型) を誘導する:

$$e_*: H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n(A \cup B, B) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

これを示す前に, まず単体複体の部分複体については成立することをみる.

定理 3.6.2 (単体複体における切除定理) K : 単体複体, L_1, L_2 : 部分複体 ($K = L_1 \cup L_2$), $e: (L_1, L_1 \cap L_2) \hookrightarrow (L_1 \cup L_2, L_2)$ 包含写像とすると, e_* は (切除) 同型.

$$e_*: H_n(L_1, L_1 \cap L_2) \xrightarrow{\cong} H_n(L_1 \cup L_2, L_2)$$

証明 まず, chain complex について次が成り立つ:

$$(*) \quad C_*(L_1) \cap C_*(L_2) = C_*(L_1 \cap L_2), \quad C_*(L_1) + C_*(L_2) = C_*(L_1 \cup L_2)$$

(ここで, 一般の加群 M, N について $M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$.)

$$(\cdot) \text{ (左側)} \quad c = \sum_i r_i s_i \in C_n(L_j) \Leftrightarrow \forall s_i \in L_j \quad (j = 1, 2), \quad (\text{以下も含め } r_i \in \mathbb{Z}).$$

$$\therefore c \in C_n(L_1) \cap C_n(L_2) \Leftrightarrow \forall s_i \in (L_1 \cap L_2) \Leftrightarrow c \in C_n(L_1 \cap L_2).$$

(右側) $C_n(L_i) \subset C_n(L_1 \cup L_2)$ なので $C_n(L_1) + C_n(L_2) \subset C_n(L_1 \cup L_2)$ は明らか.

$c = \sum_i r_i s_i \in C_n(L_1 \cup L_2)$ は (並べ替える事により) $s_1, \dots, s_k \in L_1, s_{k+1}, \dots \in L_2$ と出来る. このとき $c_1 = \sum_{i \leq k} r_i s_i \in C_n(L_1), c_2 = \sum_{i > k} r_i s_i \in C_n(L_2), c = c_1 + c_2$ なので $\supset$ が成り立つ.

$M = C_n(L_1), N = C_n(L_2)$ とおくと $(*)$ より,

$$C_n(L_1, L_1 \cap L_2) = M/(M \cap N), \quad C_n(L_1 \cup L_2, L_2) = (M + N)/N.$$

包含写像 $M \hookrightarrow (M + N)$ は同型 $M/(M \cap N) \cong (M + N)/N$ を誘導する. ((第二) 同型定理 (の加群形))
これは chain complex の同型

$$e_{\sharp}: C_*(L_1, L_1 \cap L_2) \cong C_*(L_1 \cup L_2, L_2)$$

になる. よって $e_*: H_k(L_1, L_1 \cap L_2) \xrightarrow{\cong} H_k(L_1 \cup L_2, L_2)$. □

位相空間 X の部分空間 A, B ($X = A \cup B$) の singular chain complex については一般には,

$$(**) \quad C_n(A) \cap C_n(B) = C_n(A \cap B) \text{ だが, } C_n(A) + C_n(B) \subsetneq C_n(A \cup B).$$

(特異単体 σ は値域を変えても同じものとみなす. (例えば $\sigma: \Delta^n \rightarrow A$ は $\sigma: \Delta^n \rightarrow (A \cup B)$ とみなす.))

$$(\cdot) \text{ (左側)} \quad c = \sum_i r_i \sigma_i \in C_n(A) \cap C_n(B) \Leftrightarrow \forall \text{Im } \sigma_i \subset A \cap B \Leftrightarrow c = \sum_i r_i \sigma_i \in C_n(A \cap B).$$

$$(\text{右側}) \quad c = \sum_i r_i \sigma_i \in C_n(A) + C_n(B) \Leftrightarrow \forall \text{Im } \sigma_i \subset A \text{ or } \text{Im } \sigma_i \subset B \Rightarrow c = \sum_i r_i \sigma_i \in C_n(A \cup B).$$

所が, $\sigma: \Delta^n \rightarrow (A \cup B)$ で, $\text{Im } \sigma \not\subset A$ かつ $\text{Im } \sigma \not\subset B$ となるものがあり得る. (図) ($\therefore \subsetneq$) そこで,

定義 3.6.1 (切除 (可能) 対 (excisive pair)) 位相空間 X の部分空間 A, B ($X = A \cup B$) について, 包含写像 $e: C_*(A) + C_*(B) \hookrightarrow C_*(A \cup B)$ が同型

$$e_*: H_n(C_*(A) + C_*(B)) \xrightarrow{\cong} H_n(A \cup B) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を誘導するとき, $\{A, B\}$ を X の **切除 (可能) 対** という. 特に e が chain 同値であればよい.

この定義を用いて切除定理を次の二つの命題に分割する.

命題 3.6.3 (切除同型 1) $\{A, B\}$ が X の切除対ならば, 包含写像 $i: (A, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, B)$ は次の (切除) 同型を誘導する.

$$i_*: H_*(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_*(A \cup B, B)$$

命題 3.6.4 (切除同型 2) 位相空間 X の部分空間 A, B が $A \cup B = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ ($\mathring{A}$ は A の内部) のとき $\{A, B\}$ は切除対である. 即ち 包含写像

$$e : C_*(A) + C_*(B) \xrightarrow{\sim} C_*(A \cup B) \quad \text{は chain 同値}$$

切除同型 1 の証明 $M_* = C_*(A), N_* = C_*(B)$ とおくと単体複体のときと同様に $(**)$ と包含写像により $C_*(A, A \cap B) = M_*/(M_* \cap N_*) \cong (M_* + N_*)/N_*$. $\therefore H_*(A, A \cap B) \cong H_*((M_* + N_*)/N_*)$ が誘導される. 一方, $\bar{e}_* : H_n((M_* + N_*)/N_*) \rightarrow H_n(A \cup B, B)$ については, 可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(N_*) & \longrightarrow & H_n(M_* + N_*) & \longrightarrow & H_n((M_* + N_*)/N_*) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(N_*) \longrightarrow H_{n-1}(M_* + N_*) \\ \parallel & & \downarrow e_* \cong & & \downarrow \bar{e}_* & & \parallel \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(A \cup B) & \longrightarrow & H_n(A \cup B, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(A \cup B) \\ & & & & & & \downarrow e_* \cong \end{array}$$

において, 横の列は対 $((M_* + N_*), N_*)$ と $(A \cup B, B)$ のホモロジー長完全列.

縦は包含写像 $e : (M_* + N_*) \rightarrow C_*(A \cup B)$ から導かれる準同型で,

$\{A, B\}$ が切除対より $e_* : H_n(M_* + N_*) \rightarrow H_n(A \cup B)$ は同型.

また, 全て包含写像から誘導された準同型と ∂_* で構成されているので図式は可換.

よって 5-lemma より, $\bar{e}_* : H_n((M_* + N_*)/N_*) \rightarrow H_n(A \cup B, B)$ は同型. よって,

$$i_* : H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n((M_* + N_*)/N_*) \xrightarrow{\cong} H_n(A \cup B, B) \quad \square$$

切除同型 2 の証明は長くなるので次の節で述べる. 切除対については次が成り立つ.

3.6.2 Mayer-Vietoris 完全列

chain subcomplex $C^{(1)}, C^{(2)} \subset C$ について, $C^{(0)} := C^{(1)} \cap C^{(2)}$, 包含写像を $i^k : C^{(0)} \hookrightarrow C^{(k)}, j^k : C^{(k)} \hookrightarrow C^{(1)} + C^{(2)}$ ($k=1, 2$) とするとき次の列は完全:

$0 \rightarrow C_n^{(0)} \xrightarrow{(i_n^1, i_n^2)} C_n^{(1)} \oplus C_n^{(2)} \xrightarrow{j_n^1 - j_n^2} C_n^{(1)} + C_n^{(2)} \rightarrow 0$ ($(i_n^1, i_n^2)(c) := (c, c), (j_n^1 - j_n^2)(c, d) := c - d$)
 $(\because (i_n^1, i_n^2)$ 単射は明らか. $c \in C_n^{(1)} + C_n^{(2)}$ は $c_k \in C_n^{(k)}$ の和 $c = c_1 + c_2$ に分けられるので $(j_n^1 - j_n^2)(c_1, -c_2) = c$ となり全射. $(c, d) \in \text{Ker}(j_n^1 - j_n^2) \Leftrightarrow c - d = 0 \Leftrightarrow d = c \Leftrightarrow (c, c) = (i_n^1, i_n^2)(c)$ となり完全.) $(i^1, i^2), j^1 - j^2$ を, $(i^1, -i^2), j^1 + j^2$ に置き換えても同様. $((i^1, -i^2)(c) = (c, -c).)$ これより次のホモロジー長完全列を得る:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(C^{(0)}) \xrightarrow{(i_*^1, i_*^2)} H_n(C^{(1)}) \oplus H_n(C^{(2)}) \xrightarrow{j_*^1 - j_*^2} H_n(C^{(1)} + C^{(2)}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C^{(0)}) \xrightarrow{(i_*^1, i_*^2)} \cdots$$

定理 3.6.5 (切除対の Mayer-Vietoris 完全列) A_1, A_2 を切除対とし, $i_k : A_1 \cap A_2 \hookrightarrow A_k, j_k : A_k \hookrightarrow A_1 \cup A_2 (=X)$ ($k=1, 2$) を包含写像とするとき次の列は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(A_1) \oplus H_n(A_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_n(A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \cdots$$

(ここでは切除対における同型 $H_n(C_*(A_1) + C_*(A_2)) \cong H_n(A_1 \cup A_2)$ を用いて置き換えている.)

定理 3.6.6 (単体複体の Mayer-Vietoris 完全列) L_1, L_2 を単体複体 K の部分複体, $k=1, 2$ に対し

$i_k : L_1 \cap L_2 \hookrightarrow L_k, j_k : L_k \hookrightarrow L_1 \cup L_2 (=K)$ を包含写像とするとき次の列は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(L_1) \oplus H_n(L_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} H_n(L_1 \cup L_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L_1 \cap L_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \cdots$$

いずれの定理も $(i_{1*}, i_{2*}), j_{1*} - j_{2*}$ を $(i_{1*}, -i_{2*}), j_{1*} + j_{2*}$ に置き換えても同様. (幾何学的解釈が違う.)

定義 3.6.2 閉集合 $A \subset X$ に対し, A の開近傍 U で, A が U の DR となるもの ($\exists h : U \times I \rightarrow U \text{ rel } A, h_0 = 1_U, h_1(U) \subset A$) が存在するとき A を X の **neighbourhood deformation retract (NDR)** といい, (X, A) を NDR pair, (U, h) を (X, A) の NDR 表現という. (特に $i : A \hookrightarrow U$ はホモトピー同値.)

命題 3.6.7 A_1, A_2 が X の閉集合, $X = A_1 \cup A_2$ で, $A_0 := A_1 \cap A_2$ が A_1 の NDR ならば $\{A_1, A_2\}$ は切除対.

($\because$) (U, h) を (A_1, A_0) の NDR 表現とする. $V := U \cup A_2, h' : V \times I \rightarrow V, h'|_{U \times I} := h, h(a_2, t) := a_2$ ($a_2 \in A_2$) とすれば, A_2 は (V, h') を NDR 表現とする $A_1 \cup A_2$ の NDR ($A_2 \simeq V \text{ rel } A_2$) となる. $\mathring{A}_1 \cup V = A_1 \cup A_2$ より $\{A_1, V\}$ は切除対, と併せて, $C_*(A_1) + C_*(A_2) \xrightarrow{\sim} C_*(A_1) + C_*(V) \xrightarrow{\sim} C_*(A_1 \cup A_2)$ は chain 同値. $\square$