

3.5 (Eilenberg-Steenrod による) ホモロジー論の公理系

位相空間対 (X, A) に対し, ホモロジー群と呼ばれる次数付加群

$$H_*(X, A) = \{H_n(X, A) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad (H_n(X) := H_n(X, \emptyset) \text{ とする})$$

が対応し, 対の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に対し, 次数を保つ準同型

$$f_* = H_n(f) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が対応し, (X, A) に対し, 連結 (境界) 準同型と呼ばれる (次数 (-1) の) 準同型

$$\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が与えられ, 次の7つの公理 A1 ~ A7 をみたすとき, H_* を位相空間対上のホモロジー論という:

A1 (関手性 1) 恒等写像 $1 = 1_{(X, A)} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ に対し

$$1_* = 1_{H_n(X, A)} : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A2 (関手性 2) (共変関手性) 連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ に対し,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Z, C) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A3 (∂_* の自然性) 連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に関し ∂_* は自然, 即ち, $f_X := f : X \rightarrow Y$, $f_A := f|_A : A \rightarrow B$ とするとき $\partial_* \circ f_* = f_{A*} \circ \partial_*$. 即ち次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_{A*} \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) \end{array} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A4 (ホモロジー長完全系列) 位相空間対 (X, A) に対し, $i : A \hookrightarrow X$, $j : X \setminus (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ を包含写像とすると, 次の列は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \cdots$$

A5 (ホモトピー不変性) 連続写像 $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が homotopic ($f \simeq g$) ならば

$$f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A6 (切除公理) 位相空間対 (X, A) と $U \subset A$ に対し, U が X の開集合で $\bar{U} \subset \mathring{A}$ (U の閉包が A の内部に含まれる) ならば, 包含写像 $e : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ に対し

$$e_* : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A) \quad (\text{同型}) \quad (\text{この同型を切除同型という.})$$

A7 (次元公理) 一点空間 pt に対し $H_n(\text{pt}) = 0 \quad (n \neq 0)$.

$H_0(\text{pt})$ を H_* の係数群という. (この講義では $\mathbb{Z}$.)

定理 3.5.1 特異ホモロジー論は位相空間対のホモロジー論の公理系をみたす. 更に次の公理も満たす.

A8 (加法的公理) 和空間 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対し $H_*(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda)$

(注 「位相空間対と対の連続写像」を「単体複体対と対の単体写像」に換えることにより単体複体対のホモロジー論が得られる.)

(圏と関手の言葉を用いれば, H_* は位相空間対と対の連続写像の圏から次数付加群の圏への共変関手であり, 次数 (-1) の自然変換 ∂_* をもち, A4-A7 をみたす, といえる. 尚, 次数付加群における射 $f = \{f_n : C_n \rightarrow D_{n+k} : \text{homo}\}_n$ を次数 k という.)

コホモロジー論の公理系

ホモロジー論と双対的にコホモロジー論の公理系が定義される.

即ち, 位相空間対の圏から次数付き加群の圏への反変関手 H^* は, 位相空間対 (X, A) に対し, コホモロジー群と呼ばれる次数付加群

$$H^*(X, A) = \{H^n(X, A) \mid n \in \mathbb{Z}\} \quad (H^n(X) := H^n(X, \emptyset) \text{ とする})$$

への対応であり, 対の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に対し, 次数を保つ準同型

$$f^* = H^n(f): H^n(Y, B) \rightarrow H^n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

への対応であって, (X, A) に対し, 連結 (境界) 準同型と呼ばれる (次数 $(+1)$ の) 準同型

$$\delta^*: H^n(A) \rightarrow H^{n+1}(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が与えられていて, 次の7つの公理 A1 ~ A7 をみたすとき, 位相空間対上のコホモロジー論という:

A1 (関手性 1) 恒等写像 $1 = 1_{(X, A)}: (X, A) \rightarrow (X, A)$ に対し

$$1^* = 1_{H^n(X, A)}: H^n(X, A) \rightarrow H^n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A2 (関手性 2) (反変関手性) 連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, $g: (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ に対し,

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: H^n(Z, C) \rightarrow H^n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A3 (δ^* の自然性) 連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に関し δ^* は自然, 即ち, $f_X := f: X \rightarrow Y$, $f_A := f|_A: A \rightarrow B$ とするとき $\delta^* \circ f_A^* = f^* \circ \delta^*$. 即ち次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} H^n(B) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(Y, B) \\ f_A^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^n(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(X, A). \end{array} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A4 (コホモロジー長完全系列) 位相空間対 (X, A) に対し, $i: A \hookrightarrow X$, $j: X \rightarrow (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ を包含写像とすると, 次の列は完全:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(X, A) \xrightarrow{j^*} H^{n+1}(X) \xrightarrow{i^*} \cdots$$

A5 (ホモトピー不変性) 連続写像 $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ が homotopic ($f \simeq g$) ならば

$$f^* = g^*: H^n(Y, B) \rightarrow H^n(X, A) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

A6 (切除公理) 位相空間対 (X, A) と $U \subset A$ に対し, U が X の開集合で $\bar{U} \subset \mathring{A}$ (U の閉包が A の内部に含まれる) ならば, 包含写像 $e: (X-U, A-U) \hookrightarrow (X, A)$ に対し

$$e^*: H^n(X, A) \xrightarrow{\cong} H^n(X-U, A-U) \quad (\text{同型})$$

(この同型を切除同型という.)

定理 特異コホモロジー論は位相空間対のコホモロジー論の公理系をみたす. さらに次の加法性公理も満たす.

A8 (加法性公理) 和空間 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に対し $H^*(X) \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} H^*(X_\lambda)$