

3.4.4 プリズム作用素

順序 n -単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ と $I = [0, 1]$ に対し, 積 $s \times I$ (プリズムという) を次の $n+1$ 個の $(n+1)$ -単体に分割する: $l_i = l_{s_i} := (a_i, 0)$, $u_i = u_{s_i} := (a_i, 1)$, $(i = 0, \dots, n)$ とするとき (図)

$$P^i s = P_n^i s := l_0 \cdots l_i u_i \cdots u_n \quad (i = 0, \dots, n)$$

$$\text{特に} \quad P^0 s = P_n^0 s := l_0 u_0 \cdots u_n, \quad P^n s = P_n^n s := l_0 \cdots l_n u_n.$$

単体複体 K の頂点の集合 K_0 上に各単体上では全順序となる順序が与えられたとき K を **順序単体複体** (ordered simplicial complex) という. 順序単体複体 K に対し, 積複体 $K \times I$ を $P^i s$ ($s \in K$) とその face 全体の集合として定義する. また P_n^i を準同型 $P_n^i : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K \times I)$ に拡張して考えておき, 準同型

$$P_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K \times I) \quad \text{を} \quad P_n(s) := \sum_{i=0}^n (-1)^i P_n^i s$$

で定義し, **プリズム作用素 (prism operator)**, または**プリズム準同型**という. これは $s \times I$ を $(n+1)$ -chain として表したものと考えられる. ($n=1$ のときの $P_1(s), \partial P_1(s)$ の図) このとき

補題 3.4.9 $\partial^i P^j s$ について, $u_0 \cdots u_n = (a_0 \cdots a_n) \times \{1\}$ (上面) と考え, $s \times \mathbf{1}$ と表すとき, ($s \times \mathbf{0}$ も同様)

- (1) $\partial^0 P^0 s = u_0 \cdots u_n =: s \times \mathbf{1}$ (上面), $\partial^{n+1} P^n s = l_0 \cdots l_n =: s \times \mathbf{0}$ (下面).
- (2) $i = j$ のとき $\partial^j P^j s = \partial^j P^{j-1} s$, $i = j+1$ のとき $\partial^{j+1} P^j s = \partial^{j+1} P^{j+1} s$.
- (3) $i < j$ のとき $\partial^i P^j s = P^{j-1} \partial^i s$.
- (4) $i > j+1$ のとき $\partial^i P^j s = P^j \partial^{i-1} s$.

証明 (1) $\partial^0 P^0 s = \partial^0 (l_0 u_0 \cdots u_n) = u_0 \cdots u_n$, $\partial^{n+1} P^n s = \partial^{n+1} (l_0 \cdots l_n u_n) = l_0 \cdots l_n$.

(2) $\partial^j P^j s = l_0 \cdots l_{j-1} \overset{j}{l_j} u_j \cdots u_n = l_0 \cdots l_{j-1} \overset{j}{u_{j-1}} u_j \cdots u_n = \partial^j P^{j-1} s$.

$i = j+1$ のときは j を $j+1$ として左辺と右辺を入れ替える.

(3) ($i < j$) $\partial^i P^j s = l_0 \cdots \overset{i}{l_i} \cdots \overset{j-1}{l_j} u_j \cdots u_n = P^{j-1} \partial^i s$.

(4) ($i > j+1$) $\partial^i P^j s = l_0 \cdots l_j u_j \cdots \overset{i}{u_{i-1}} \cdots u_n = P^j \partial^{i-1} s$.

$s \times I$ の境界は上面 $s \times \mathbf{1}$, 下面 $s \times \mathbf{0}$ と側面 $(\partial s) \times I = P_{n-1}(\partial s)$ から成るが, 実際:

命題 3.4.10 $\partial_{n+1} P_n(s) = s \times \mathbf{1} - s \times \mathbf{0} - P_{n-1}(\partial_n s)$.

証明 ($\partial_n \partial_{n+1} = 0$ の証明と同様, 補題 1 を用いて添え字の付け替えにより上式が成立することを見る.)

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} P_n(s) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j P^j s \right) = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} \partial^i P^j s \\ &= \partial^0 P^0 s + \partial^1 P^1 s + \cdots + \partial^n P^n s \quad (i=j) \\ &\quad - \partial^1 P^0 s - \cdots - \partial^n P^{n-1} s - \partial^{n+1} P^n s \quad (i=j+1) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \partial^i P^j s + \sum_{0 \leq j, j+1 < i \leq n} (-1)^{i+j} \partial^i P^j s \end{aligned}$$

上の 2,3 行目の上下対応する項は補題 1 の (2) により消え, はみ出た 2 項は (1) により $s \times \mathbf{1} - s \times \mathbf{0}$.

次の項は (3) により $P^{j-1} \partial^i s$ に, また $k = j-1$, $m = i$ と置き換え ($\partial^i P^j s = P^{j-1} \partial^i s = P^k \partial^m s$),

最後の項は (4) より $P^j \partial^{i-1} s$ に, また $k = j$, $m = i-1$ と置き換える ($\partial^i P^j s = P^j \partial^{i-1} s = P^k \partial^m s$) と

$i+j = k+m+1$, (3): $0 \leq i < j \leq n \Rightarrow 0 \leq m \leq k \leq n-1$ (4): $0 \leq j, j+1 < i \leq n \Rightarrow 0 \leq k < m \leq n$ よりこの 2 項は:

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leq m \leq k \leq n-1} (-1)^{k+m+1} P^k \partial^m s + \sum_{0 \leq k < m \leq n} (-1)^{k+m+1} P^k \partial^m s \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P^k \left(\sum_{m=0}^n (-1)^m \partial^m s \right) = -P_{n-1}(\partial_n s). \\ &\therefore \partial_{n+1} P_n(s) = s \times \mathbf{1} - s \times \mathbf{0} - P_{n-1}(\partial_n s). \end{aligned}$$

3.4.5 特異単体のプリズム

特異単体 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ の face と境界は, $\partial_n^i \sigma := \sigma d_n^i : \Delta^{n-1} \xrightarrow{\cong} \partial^i \Delta^n \subset \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X$,

$$\partial_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma d_n^i = \sigma_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i \right) = \sigma_{n-1}(d_n), \quad d_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i \in C_{n-1}(\Delta^n).$$

$\sigma = 1_{\Delta^n}$ のとき $\partial_n(1_{\Delta^n}) = d_n$. よって, $\partial_n(\sigma) = \sigma_{n-1}(d_n) = \sigma_{n-1}(\partial_n(1_{\Delta^n}))$. (注: σ_{n-1} は chain map.)

この様に, 単体 s に対して定義されているものを特異単体 σ に読み替えるときは まず,

$s = \Delta^n = e_0 e_1 \cdots e_n$ として, これを Δ^n を表す特異単体 1_{Δ^n} に読み替える.

ホモトピーにおいては prism $\Delta^n \times I$ を $(n+1)$ -単体 $P^0 \Delta^n, \dots, P^n \Delta^n$ に分割し, これらを $\Delta^n \times I$ の特異 $(n+1)$ -単体とみなしたものを $P_n^i(1_{\Delta^n}) = \pi^i = \pi_{n+1}^i$ とする. 即ち,

$$P_n^i(1_{\Delta^n}) = \pi^i = \pi_{n+1}^i : \Delta^{n+1} \xrightarrow{\cong} P^i \Delta^n \subset \Delta^n \times I \in S_{n+1}(\Delta^n \times I)$$

また, $\Delta^n \times I$ を表す特異 $(n+1)$ -chain $P_n(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1}$ を **prism chain** といい, 次式で定義する:

$$P_n(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1} := \sum_{i=0}^n (-1)^i \pi_{n+1}^i = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_n^i(1_{\Delta^n}) \in C_{n+1}(\Delta^n \times I)$$

特異 n -単体 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ に対し, $\sigma \times 1_I : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I$ を $\sigma \times I$ と表し **特異プリズム** という.

$\sigma \times I$ の, $P_n^i s$ に当る特異単体 $P_n^i \sigma$ は

$$P_n^i \sigma = P_n^i(\sigma) := (\sigma \times I) \pi_{n+1}^i = (\sigma \times I)_{n+1} P_n^i(1_{\Delta^n}) : \Delta^{n+1} \xrightarrow{\pi^i} P^i \Delta^n \subset \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times I} X \times I$$

で, $s \times I$ を chain で表した $P_n(s) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_n^i s$ に当る, $\sigma \times I$ を表す chain $P_n(\sigma) \in C_{n+1}(X \times I)$ は

$$P_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \times I) \pi_{n+1}^i = (\sigma \times I)_{n+1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \pi_{n+1}^i \right) = (\sigma \times I)_{n+1}(\pi_{n+1}) = (\sigma \times I)_{n+1} P_n(1_{\Delta^n})$$

これを準同型 $P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$ (**prism 準同型**) に拡張して考えておく, 特に, $P_n(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1}$.

● この様に, まず $s = \Delta^n$, $\sigma = 1_{\Delta^n}$ で考え (π^i, π_{n+1}) , 一般の σ については $(\sigma \times I)_{\#}$ でうつせばよい.

$\sigma \times I$ の境界については, $\sigma = 1_{\Delta^n}$ のとき, $i_t : \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n \times I$ ($t \in I$) を $i_t(x) := (x, t)$ とすると, i_0, i_1 はそれぞれ Δ^n の, $\Delta^n \times I$ の下面 $\Delta^n \times \{0\}$, 上面 $\Delta^n \times \{1\}$ への包含写像であり, $\Delta^n \times \{0\}, \Delta^n \times \{1\}$ を表す $\Delta^n \times I$ の特異 n -単体とみなせ, 一般の σ については $i_t^X : X \hookrightarrow X \times I$ ($i_t^X(x) = (x, t)$) とすると

$$(\sigma \times I)_n(i_t) = (\sigma \times I)_n i_t = i_t^X \sigma : \Delta^n \rightarrow X \times I \quad (\because ((\sigma \times I)_n i_t)(x) = (\sigma(x), t) = (i_t^X \sigma)(x))$$

($t = 0, 1$) が $\sigma \times I$ の下面と上面を表している. 側面については, $\sigma = 1_{\Delta^n}$ のとき $P_n^j(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1}^j$ より,

$$\partial_{n+1}^i P_n^j(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1}^j d_{n+1}^i : \Delta^n \xrightarrow{\cong} \partial^i \Delta^{n+1} \subset \Delta^{n+1} \xrightarrow{\pi_{n+1}^j} P^j \Delta^n \subset \Delta^n \times I, \quad \text{Im}(\pi_{n+1}^i d_{n+1}^j) = \partial^i P^j \Delta^n$$

$P_{n-1}^j \partial_n^i \Delta^n$ に当るのは, $P_{n-1}^j \partial_n^i(1_{\Delta^n})$ だが, 次の様に $\text{Im } P_{n-1}^j \partial_n^i(1_{\Delta^n}) = P_{n-1}^j \partial_n^i \Delta^n$

$$P_{n-1}^j \partial_n^i(1_{\Delta^n}) = P_{n-1}^j(d_n^i) = (d_n^i \times I)_n(\pi_n^j) = (d_n^i \times I)_n \pi_n^j : \Delta^n \xrightarrow{\pi_n^j} P^j \Delta^{n-1} \subset \Delta^{n-1} \times I \xrightarrow{d_n^i \times I} \Delta^n \times I$$

このとき 補題 3.4.9 が, s を 1_{Δ^n} に, $P^i s$ を $P^i(1_{\Delta^n}) = \pi_{n+1}^i$ に, $s \times 0, s \times 1$ を i_0, i_1 に置き換えて成り立つことが, $\partial^i P^j(1_{\Delta^n})$ による Δ^n の (頂点の) 像が補題 3.4.9 の関係を満たすことにより分かり, 命題 3.4.10 は次の様に置き換えられる:

命題 3.4.11 $\partial_{n+1} P_n(1_{\Delta^n}) = i_1 - i_0 - P_{n-1}(\partial_n 1_{\Delta^n})$.

一般の σ についても $(\sigma d_n^i) \times I = (\sigma \times I)(d_n^i \times I)$ と $(\sigma \times I)_n(i_t) = i_t^X \sigma$, ($t = 0, 1$),

$(\sigma \times I)_n \partial_{n+1} P_n(1_{\Delta^n}) = \partial_{n+1}((\sigma \times I)_{n+1} P_n(1_{\Delta^n})) = \partial_{n+1} P_n(\sigma)$ より

$$\begin{aligned} P_{n-1}(\partial_n \sigma) &:= P_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma d_n^i \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i ((\sigma \times I)(d_n^i \times I))_n(\pi_n) = (\sigma \times I)_n \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (d_n^i \times I)_n \pi_n \right) \\ &= (\sigma \times I)_n P_{n-1}(\partial_n 1_{\Delta^n}) = (\sigma \times I)_n(i_1 - i_0 - \partial_{n+1} P_n(1_{\Delta^n})) = i_1^X \sigma - i_0^X \sigma - \partial_{n+1} P_n(\sigma) \end{aligned}$$

よって次を得た:

命題 3.4.12 $\partial_{n+1} P_n(\sigma) = i_1^X \sigma - i_0^X \sigma - P_{n-1}(\partial_n \sigma)$.