

3.4 ホモトピー (homotopy) 不変性

3.4.1 連続写像のホモトピー

以下, 特に断らない限り位相空間の間の写像は連続とし, $I = [0, 1]$ とする.

定義 3.4.1 (ホモトピー (homotopy)) 位相空間 X, Y 間の連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$ に対し, 連続写像

$$h : X \times I \rightarrow Y, \quad h(x, 0) = f(x), \quad h(x, 1) = g(x)$$

が存在するとき f と g は **homotopic** という (ホモトープともいう). $h_t : X \rightarrow Y$ を $h_t(x) := h(x, t)$ とするとき $h_0 = f, h_1 = g$ で, f と g は 1-parameter の連続変形で移りあうことを表す. (図)

この h を f から g への (f と g を結ぶ) **ホモトピー (homotopy)** といい, 次の様に表す:

$$h : f \simeq g, \quad f \simeq g, \quad f \underset{h}{\simeq} g : X \rightarrow Y. \quad (f_t : f_0 \simeq f_1)$$

ホモトピー $h : f \simeq g$ が対の連続写像 $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ の間のホモトピーとは, $h(A \times I) \subset B$ をみたすときとする. 即ち, h は対の連続写像 $h : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$. このとき, $h_{A \times I} : f_A \simeq g_A$.

特に, $f_A = g_A$ で, $h(a, t) = f(a) = g(a)$ ($(a, t) \in A \times I$) のとき h は A を止めて homotopic (homotopic relative to A) といい, 次の様に表す: $h : f \simeq g \text{ rel } A$

命題 3.4.1 $\text{homotopic} \simeq$ は連続写像全体の集合 $\text{Map}(X, Y)$ 上の同値関係.

証明 (1) $f \underset{h}{\simeq} f$ ($\because h(x, t) := f(x)$ ($t \in I$)). (2) $f \underset{h}{\simeq} g \Rightarrow g \underset{h'}{\simeq} f$ ($\because h'(x, t) := h(x, 1-t)$ ($t \in I$)).

$$(3) f_0 \underset{h}{\simeq} f_1, f_1 \underset{h'}{\simeq} f_2 \Rightarrow f_0 \underset{h''}{\simeq} f_2 \quad (\because h''(x, t) := (h \cdot h')(x, t) := \begin{cases} h(x, 2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ h'(x, 2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases})$$

この写像 h'' の連続性は $X_0 := X \times [0, 1/2], X_1 := X \times [1/2, 1]$ が $X \times I$ の閉集合であることと, $h|_{X_0}, h|_{X_1}$ が共に連続であることから出る. $\square$

この同値関係による f の同値類を f の **ホモトピー類 (homotopy class)** といい, $[f]$ と表す. ホモトピー類の集合 $\text{Map}(X, Y)/\simeq$ を $[X, Y]$ と表し, X から Y への **ホモトピー集合 (homotopy set)** という.

定義 3.4.2 (ホモトピー同値) 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ に対し, 連続写像 $g : Y \rightarrow X$ で $g \circ f \simeq 1_X, f \circ g \simeq 1_Y$ となるものが存在するとき f は **homotopy equivalence (ホモトピー同値 (写像))**, g は f の **homotopy inverse (ホモトピー逆写像)** といい, この様な f, g が存在するとき X と Y は **homotopy equivalent (ホモトピー同値)** であるといい, 次の様に表す:

$$f : X \xrightarrow{\simeq} Y, \quad X \simeq Y, \quad f : X \simeq Y \text{ etc.}$$

例 3.4.1 (ホモトピー同値) $X = \mathbb{R}^n - \{0\}, B^n - \{0\}$ とするとき, 包含写像 $i : S^{n-1} \hookrightarrow X$ はホモトピー同値写像.

証明 $r : X \rightarrow S^{n-1} (\subset X)$ を $r(x) := \frac{x}{\|x\|}$, $r_t(x) := (1-t)r(x) + tx = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$ と定めれば $r_0 = r = i \circ r$, $r_1 = 1_X$ より $r_t : i \circ r \simeq 1_X$. $r \circ i = r|_{S^{n-1}} = 1_{S^{n-1}}$. $\therefore i : S^{n-1} \xrightarrow{\simeq} X$. $\square$

用語 $A \subset X$ が X の **retract** (レトラクト) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists r : X \rightarrow A \subset X$ s.t. $r|_A = 1_A$. この r を **retraction** という. さらに $r \simeq 1_X \text{ rel } A$ のとき A を X の **(strong) deformation retract** (略して DR) といい, r を **(strong) deformation retraction** という. このとき包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ がホモトピー同値写像で r がホモトピー逆写像. $r \circ i = r|_A = 1_A$. $i \circ r = r \simeq 1_X \text{ rel } A$. (注: $r \simeq 1_X \text{ rel } A$ のとき DR と呼ぶ文献と, strong DR と呼ぶ文献がある. 後者の場合, DR は単に $r \simeq 1_X$ のときをいう.)

上の例の S^{n-1} は $X = \mathbb{R}^n - \{0\}, B^n - \{0\}$ の DR で $r : X \rightarrow S^{n-1}$ は deformation retraction.

ここでの目標の定理は **定理 (ホモトピー公理 (ホモトピー不変性))**

定理 3.4.2 (ホモトピー公理 (ホモトピー不変性)) $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B) \Rightarrow f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$.

系 3.4.3 $f : X \simeq Y \implies f_* : H_*(X) \cong H_*(Y)$ (同型).

系の証明 $g : Y \rightarrow X, g \circ f \simeq 1_X, f \circ g \simeq 1_Y$ とすると, $g_* \circ f_* = 1, f_* \circ g_* = 1$ より f_* は同型. $\square$

この定理を示す前に, chain map の間のホモトピー (chain homotopy) と単体写像間のホモトピー (単体的ホモトピー (simplicial homotopy)) について述べる.

3.4.2 chain homotopy

定義 3.4.3 (chain homotopy) chain map $f, g : C \rightarrow D$ に対し,

$$h = \{h_n : C_n \rightarrow D_{n+1} : \text{homo}\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (\text{次数を一つ上げる準同型の組})$$

が f から g への **chain homotopy** (鎖ホモトピー) とは次をみたすとき:

$$\partial'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = g_n - f_n.$$

このとき f と g は **chain homotopic** といい, 連続写像の時と同様に表す:

$$h : f \simeq g, \quad f \simeq g, \quad f \underset{h}{\simeq} g : C \rightarrow D, \text{ etc.}$$

chain complex におけるホモトピー同値は **chain (homotopy) equivalent(ce)** (チェイン同値) といわれ, 連続写像に対するものと同様の記号を用いる. 即ち:

$$\text{chain map } f : C \rightarrow D \text{ が chain 同値} \iff \exists g : D \rightarrow C \text{ s.t. } g \circ f \simeq 1_C, f \circ g \simeq 1_D.$$

このとき $f : C \xrightarrow{\simeq} D, C \simeq D, f : C \simeq D$ etc. と表す.

定理 3.4.4 (chain map におけるホモトピー不変性) $f \underset{h}{\simeq} g : C \rightarrow D \implies f_* = g_* : H_*(C) \rightarrow H_*(D).$

証明 $z \in Z_n(C) (\iff \partial_n z = 0) \implies g_n z - f_n z = \partial'_{n+1} h_n z + h_{n-1}(\partial_n z) = \partial'_{n+1} h_n z \in B_n(D). \therefore [g_n z] = [f_n z] \quad \square$

系 3.4.5 $f : C \simeq D \implies f_* : H_*(C) \cong H_*(D)$ (同型). (証明は連続写像のときと同様.)

3.4.3 単体的ホモトピー

▷ 積複体 $K \times I$ とプリズム作用素, 命題 3.4.10 については次のプリント参照.

定義 3.4.4 (単体的ホモトピー (simplicial homotopy)) 単体複体間の単体写像 $f, g : K \rightarrow L$ が **homotopic** $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ 単体写像 $h : K \times I \rightarrow L$ s.t. $h(s \times 0) = f(s), h(s \times 1) = g(s) (s \in K)$. このとき (他と同様) $h : f \simeq g, f \simeq g, f \underset{h}{\simeq} g : K \rightarrow L$, etc. と表す. 単体複体のホモトピー同値も同様に定義する.

命題 3.4.6 単体的ホモトピー $h : K \times I \rightarrow L$ s.t. $h(s \times 0) = f(s), h(s \times 1) = g(s) (s \in K)$ は chain homotopy $\bar{h} = \{\bar{h}_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(L)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を誘導する.

証明 $h : K \times I \rightarrow L$ の誘導する chain map $h_{\sharp} = \{h_n : C_n(K \times I) \rightarrow C_n(L)\}_n$ と prism 準同型 $\{P_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(K \times I)\}_n$ の合成写像 $\{\bar{h}_n := h_{n+1} P_n\}$ を $\bar{h} = \{\bar{h}_n : C_n(K) \rightarrow C_{n+1}(L)\}$ とおくと chain homotopy になる. 実際, 命題 3.4.10 $\partial_{n+1} P_n(s) = s \times 1 - s \times 0 - P_{n-1}(\partial_n s)$ より

$$\begin{aligned} \partial'_{n+1} \bar{h}_n(s) &= \partial'_{n+1} h_{n+1} P_n(s) = h_n \partial_{n+1} P_n(s) = h_n(s \times 1 - s \times 0 - P_{n-1}(\partial_n s)) \\ &= h(s \times 1) - h(s \times 0) - h_n(P_{n-1} \partial_n s) = g(s) - f(s) - \bar{h}_{n-1} \partial_n s = g_n(s) - f_n(s) - \bar{h}_{n-1} \partial_n(s) \end{aligned} \quad \square$$

この命題と chain map でのホモトピー不変性定理 3.4.4 より

定理 3.4.7 (単体写像のホモトピー不変性) $f \underset{h}{\simeq} g : K \rightarrow L \implies f_* = g_* : H_*(K) \rightarrow H_*(L).$

3.4.4 連続写像のホモトピー

▷ prism 準同型 $P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)$, 命題 3.4.12 については次のプリント参照.

命題 3.4.8 ホモトピー $h : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ s.t. $h(x, 0) = f(x), h(x, 1) = g(x) (x \in X)$ は chain homotopy $\bar{h} = \{\bar{h}_n : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を誘導する.

証明 $h : X \times I \rightarrow Y$ の誘導する chain map $h_{\sharp} = \{h_n : C_n(X \times I) \rightarrow C_n(Y)\}_n$ と prism 準同型 $\{P_n : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X \times I)\}_n$ の合成写像 $\{\bar{h}_n := h_{n+1} P_n : C_n(X) \xrightarrow{P_n} C_{n+1}(X \times I) \xrightarrow{h_{n+1}} C_{n+1}(Y)\}_n$ を $\bar{h} = \{\bar{h}_n\}$ とおくと chain homotopy になる. 実際, $i_t^X(x) := (x, t)$ に対し, $f(x) = h(x, 0) = h i_0^X(x), g(x) = h(x, 1) = h i_1^X(x)$ なので命題 3.4.12: $\partial_{n+1} P_n(\sigma) = i_1^X \sigma - i_0^X \sigma - P_{n-1}(\partial_n \sigma)$ より

$$\begin{aligned} \partial'_{n+1} \bar{h}_n(\sigma) &:= \partial'_{n+1} h_{n+1} P_n(\sigma) = h_n \partial_{n+1} P_n(\sigma) = h_n(i_1^X \sigma - i_0^X \sigma - P_{n-1}(\partial_n \sigma)) \\ &= h i_1^X \sigma - h i_0^X \sigma - h_n(P_{n-1} \partial_n \sigma) = g \circ \sigma - f \circ \sigma - \bar{h}_{n-1} \partial_n \sigma = g_n(\sigma) - f_n(\sigma) - \bar{h}_{n-1} \partial_n(\sigma). \end{aligned}$$

$P_n(C_n(A)) \subset C_{n+1}(A \times I)$ なので, $h(A \times I) \subset B$ より $\bar{h}(C_n(A)) \subset C_{n+1}(B)$. 従って $\bar{h}$ は chain homotopy $\bar{h} : C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(Y, B)$ を誘導する (同じ記号を用いた). $\square$

この命題と chain map でのホモトピー不変性定理 3.4.4 より前掲の次の定理を得る.

定理 3.4.2 (ホモトピー公理, ホモトピー不変性定理) $f \underset{h}{\simeq} g : (X, A) \rightarrow (Y, B) \implies f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B).$

