

完全系列に関する補題

補題 3.3.9 (five lemma (五項補題)) 次の加群と準同型の可換図式において横の列は完全とする：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{i_1} & A_2 & \xrightarrow{i_2} & A_3 & \xrightarrow{i_3} & A_4 & \xrightarrow{i_4} & A_5 & & \text{(完全)} \\
 f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow & & \\
 B_1 & \xrightarrow{j_1} & B_2 & \xrightarrow{j_2} & B_3 & \xrightarrow{j_3} & B_4 & \xrightarrow{j_4} & B_5 & & \text{(完全)}
 \end{array}$$

このとき f_3 について

1. f_2, f_4 が全射, f_5 が単射 $\implies f_3$ は全射.
2. f_2, f_4 が単射, f_1 が全射 $\implies f_3$ は単射.
3. f_2, f_4 が同型, f_1 が全射, f_5 が単射 $\implies f_3$ は同型.
特に f_1, f_2, f_4, f_5 が同型 $\implies f_3$ は同型.

証明 3. は 1., 2. の組み合わせ. 以下 $a_i, a'_i \in A_i, b_i, b'_i \in B_i, (i = 1, \dots, 5)$ とする.

1. (全射性) ① $b_3 \in B_3$ とすると $j_4 j_3 b_3 = 0$.

② f_4 全射より $f_4 a_4 = j_3 b_3$ となる $a_4 \in A_4$ がある.
 $f_5 i_4 a_4 = j_4 f_4 a_4 = j_4 j_3 b_3 = 0$ と f_5 単射より $i_4 a_4 = 0$.
 $\therefore a_4 \in \text{Ker } i_4 = \text{Im } i_3$

③ $\therefore i_3 a'_3 = a_4$ となる $a'_3 \in A_3$ があり
 $j_3 f_3 a'_3 = f_4 i_3 a'_3 = f_4 a_4 = j_3 b_3. \therefore b'_3 = b_3 - f_3 a'_3$ とおけば
 $j_3(b'_3) = 0, \text{ i.e., } b'_3 \in \text{Ker } j_3 = \text{Im } j_2.$

④ $\therefore j_2 b_2 = b'_3$ をみたす $b_2 \in B_2$ がある.

⑤ f_2 全射より $f_2 a_2 = b_2$ をみたす $a_2 \in A_2$ がある.
 図式の可換性より $f_3 i_2 a_2 = j_2 f_2 a_2 = j_2 b_2 = b'_3.$

⑥ $a_3 := i_2 a_2 + a'_3 \in A_3$ とおけば
 $f_3 a_3 = b'_3 + f_3 a'_3 = (b_3 - f_3 a'_3) + f_3 a'_3 = b_3$
 となり f_3 全射が示された.

2. (単射性) ① $a_3 \in \text{Ker } f_3 \subset A_3$ とすると

$f_4 i_3 a_3 = j_3 f_3 a_3 = j_3 0 = 0. f_4$ 単射より $i_3 a_3 = 0$.
 $\therefore a_3 \in \text{Ker } i_3 = \text{Im } i_2.$

② $\therefore i_2 a_2 = a_3$ となる $a_2 \in A_2$ があり
 $j_2 f_2 a_2 = f_3 i_2 a_2 = f_3 a_3 = 0$.
 $\therefore f_2 a_2 \in \text{Ker } j_2 = \text{Im } j_1.$

③ $\therefore j_1 b_1 = f_2 a_2$ となる $b_1 \in B_1$ がある.

④ f_1 全射より $f_1 a_1 = b_1$ をみたす $a_1 \in A_1$ があり, 図式の可換性より $f_2 i_1 a_1 = j_1 f_1 a_1 = j_1 b_1 = f_2 a_2.$

⑤ f_2 単射より $i_1 a_1 = a_2. \therefore a_3 = i_2 a_2 = i_2 i_1 a_1 = 0$ となり
 f_3 単射が示された.

$$\begin{array}{ccccc}
 \textcircled{3} & a'_3 & \xrightarrow{i_3} & \textcircled{2} & a_4 & \xrightarrow{i_4} & 0 \\
 & & & f_4 \downarrow & & & f_5 \downarrow \\
 \textcircled{1} & b_3 & \xrightarrow{j_3} & j_3 b_3 & \xrightarrow{j_4} & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{5} & a_2 & \xrightarrow{i_2} & \textcircled{6} & i_2 a_2 & & \\
 f_2 \downarrow & & & f_3 \downarrow & & & \\
 \textcircled{4} & b_2 & \xrightarrow{j_2} & b'_3 = b_3 - f_3 a'_3 & \xrightarrow{j_3} & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \textcircled{4} & a_1 & \xrightarrow{i_1} & \textcircled{2} & a_2 & \xrightarrow{i_2} & \textcircled{1} & a_3 & \xrightarrow{i_3} & \textcircled{1} & 0 \\
 f_1 \downarrow & & & f_2 \downarrow & & & f_3 \downarrow & & & f_4 \downarrow & \\
 \textcircled{3} & b_1 & \xrightarrow{j_1} & f_2 a_2 & \xrightarrow{j_2} & 0 & \xrightarrow{j_3} & 0
 \end{array}$$

直和列 次の完全列を **直和 (完全) 列** ということにする, ここで, i_1, i_2, p_1, p_2 は第 1, 第 2 成分への入射, 射影:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} A \oplus C \xrightarrow[p_1]{p_2} C \longrightarrow 0, \quad i_1(a) = (a, 0), \quad p_2(a, c) = c, \quad (i_2(c) = (0, c), \quad p_1(a, c) = a,)$$

$p_1 i_1 = 1_A, p_2 i_2 = 1_C$. 次の補題は短完全列が直和列と同型になる為の条件を与える.

補題 3.3.10 (splitting (完全列の分裂)) 次の加群の短完全列において

$$(*) \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow[r]{j} C \longrightarrow 0$$

(1) $js = 1_C$ となる準同型 $s: C \rightarrow B$, (2) $ri = 1_A$ となる準同型 $r: B \rightarrow A$ のいずれか一方が存在すれば他方も存在して, $A' := \text{Im } i$, (1): $C' := \text{Im } s$, (2) $C' := \text{Ker } r$ とすると

$$i \oplus s: A \oplus C \xrightarrow{\cong} A' \oplus C' = B.$$

より詳しくは, i', s' を i, s の値域の制限写像 $i' = i: A \xrightarrow{\cong} A'$, $s' = s: C \xrightarrow{\cong} C'$, r', j' を r, j の定義域の制限写像 $r' := r|_{A'}: A' \xrightarrow{\cong} A$, $j' := j|_{C'}: C' \xrightarrow{\cong} C$ とするとき, $r' = i'^{-1}$, $s' = j'^{-1}$ であり, $(*)$ は直和列と同型:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow r' & \parallel i' & \parallel & \parallel j' & \downarrow s' \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[p_1]{i_1} & A' \oplus C' & \xrightarrow[p_2]{p_1} & C' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (i_1, i_2 \text{ は入射}, p_1, p_2 \text{ は射影}).$$

このとき, $r = r' p_1 = i'^{-1} p_1$, $s = i_2 s' = i_2 j'^{-1}$. $\text{Ker } r = \text{Im } s = C'$.

この s, r を **splitting (分裂 (分解) 準同型)** といい, 完全列は **分裂 (分解, split)** するという.

証明 i は単射より $A' = \text{Ker } j = \text{Im } i \xrightarrow{i'} A$. (1) のとき $C' := \text{Im } s$, (2) のとき $C' := \text{Ker } r$ として, $C \cong C'$, $B = A' + C'$, $A' \cap C' = 0$ ($\therefore B = A' \oplus C'$) を示せばよい.

(1) ($\exists s$ のとき): $js = 1_C$ より s は単射で $s': C \cong \text{Im } s =: C'$. $\forall b \in B$ に対し $c' := sj(b) \in C'$, $a' := b - c'$ とすれば, $j(a') = j(b) - jsj(b) = j(b) - 1_C j(b) = 0$ より $a' \in \text{Ker } j = A'$. $\therefore b = a' + c' \in A' + C'$.

$b \in A' \cap C'$ とする. $b \in C' = \text{Im } s \Leftrightarrow \exists c \in C (b = s(c))$. このとき $j(b) = js(c) = c$. 一方 $b \in A' = \text{Ker } j$ より $c = j(b) = 0$. $\therefore b = s(c) = s(0) = 0$. $\therefore A' \cap C' = 0$. $\therefore B = A' \oplus C'$.

このとき, $r := i'^{-1} p_1: B = A' \oplus C' \xrightarrow{p_1} A' \xrightarrow{i'^{-1}} A$. とすれば r を得る.

(2) ($\exists r$ のとき): $\forall b \in B$ に対し $a' := ir(b) \in \text{Im } i =: A'$, $c' := b - a'$ とおくと,

$r(c') = r(b) - rir(b) = r(b) - 1_A r(b) = 0$. $\therefore c' \in \text{Ker } r =: C'$. $\therefore b = a' + c' \in A' + C'$.

$b \in A' \cap C'$ とすると $b \in A' \Leftrightarrow \exists a \in A (b = i(a))$. $r(b) = ri(a) = a$ であり, $b \in C' = \text{Ker } r$ より $a = r(b) = 0$. $\therefore b = i(0) = 0$. $\therefore A' \cap C' = 0$. $\therefore B = A' \oplus C'$. このとき $j' := j|_{C'}: C' \rightarrow C$ は, $\text{Ker } j' = \text{Ker } j \cap C' = A' \cap C' = 0$ より単射, j は全射なので $\forall c \in C \exists b \in B (c = j(b))$. $j(b) = j(a' + c') = j(c') = j'(c')$ より j' は全射. $\therefore j'$ は同型. このとき $s := j'^{-1} p_2$ とすれば s を得る.

注意 1 この完全列が非可換群の完全列の場合, $A' := \text{Ker } j$ は正規部分群であり, r が存在するときは $C' := \text{Ker } r$ より C' が正規部分群となり B の直和 (直積) 分解を得るが, s のみが存在するときは $C' := \text{Im } s$ は正規部分群とは限らず, 一般には B は A' と C' の半直積 $A' \rtimes C'$ になり, 従って B は半直積 $A \rtimes C$ に同型となる.

注意 2 C が自由加群ならば $\text{splitting } s: C \rightarrow B$ が存在する. 実際, $\{c_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を C の基底とすると, $b_\lambda \in j^{-1}(c_\lambda) \subset B$ ($\lambda \in \Lambda$) を選んで $s(c_\lambda) := b_\lambda$ とすればよい.

注意 3 加群の長完全列: $\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{i_{n+1}} A_n \xleftarrow[p_1]{i_n} A_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1}} A_{n-2} \xrightarrow{i_{n-2}} \cdots$ において $s: A_{n-1} \rightarrow A_n$ が,

(1) $i_n s = 1_{A_{n-1}}$ のとき: i_n は全射, s は単射で, $A_n = \text{Ker } i_n \oplus \text{Im } s \cong \text{Im } i_{n+1} \oplus A_{n-1}$.

$\text{Ker } i_{n-1} = \text{Im } i_n = A_{n-1}$, $\therefore i_{n-1} = 0$ で, この完全列は 2 つに分かれる:

$$\cdots \longrightarrow A_n \xleftarrow[p_1]{i_n} A_{n-1} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow A_{n-2} \xrightarrow{i_{n-2}} \cdots$$

(2) $s i_n = 1_{A_n}$ のとき: i_n は単射, s は全射で, $A_{n-1} = \text{Im } i_n \oplus \text{Ker } s \cong A_n \oplus \text{Ker } s$. $0 = \text{Ker } i_n = \text{Im } i_{n+1}$ で

$$\cdots \longrightarrow A_{n+2} \xrightarrow{i_{n+2}} A_{n+1} \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow A_n \xleftarrow[p_1]{i_n} A_{n-1} \xrightarrow{i_{n-2}} \cdots$$