

3 特異ホモロジー論 (singular homology theory)

3.1 位相空間の特異ホモロジー群

以下, X, Y 等は位相空間, $A \subset X, B \subset Y$ 等は部分空間とし, 位相空間の間の写像 $f, g: X \rightarrow Y$ 等は連続とする. また, 値域を拡大 (縮小) した写像は元の写像と同じ写像とみなす.

3.1.1 特異ホモロジー群

序 標準 n -単体 $\Delta^n := e_0 e_1 \cdots e_n$ ($e_0 = (1, 0, \dots), e_1 = (0, 1, 0, \dots), \dots$) と順序 n -単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ に対し, (唯一つの) 頂点の順序を保つ線型同相 (=線型写像の制限写像となる同相写像) が $(\sigma_s := \sigma_s \Delta^n$ として)

$$\sigma_s: \Delta^n \xrightarrow{\cong} s, \quad \sigma_s \left(\sum_{i=0}^n t_i e_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \left(\sum_{i=0}^n t_i e_i = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \Delta^n \right), \quad \text{特に } \sigma_s(e_i) = a_i$$

で与えられる. これを同型の記号 $\cong$ を用いて, $\sigma_s: \Delta^n \cong s$ 等と表す. 逆に, $\tilde{\sigma}_s(e_i) = a_i$ ($\forall i$) となる線型写像 $\tilde{\sigma}_s: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ は, $e_0, \dots, e_n$ が $\mathbb{R}^{n+1}$ の基底なので上式で与えられ, $\sigma_s = \tilde{\sigma}_s|_{\Delta^n}$. これにより, 順序 n -単体 s と σ_s は 1 対 1 に対応する. 順序単体複体 K (頂点の集合 K_0 に, 各単体上では全順序となる半順序が与えられた単体複体) の単体 $s \in K$ に対し, σ_s は多面体 $|K|$ の中への同相写像 $\sigma_s: \Delta^n \xrightarrow{\cong} s \hookrightarrow |K|$ とみなせる. (図)

また, 位相空間 X に単体分割 $(K, f: |K| \xrightarrow{\cong} X)$ が与えられたとき, K の単体 s は, 同相写像 f を通じて X の「単体 $f(s)$ 」とみなされているが, これも X の中への同相 $f \circ \sigma_s: \Delta^n \rightarrow X$ とみなせる. (図)

位相空間は一般には単体分割をもたないので, これを連続写像に拡張して考える.

特異単体, singular chain complex

定義 3.1.1 (特異単体) 連続写像 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ を X の**特異 n -単体 (singular n -simplex)** という. X の特異 n -単体全体の集合を $S_n(X)$ と表す ($n < 0$ のときは $S_n(X) = \emptyset$):

$$S_n(X) := \{ \sigma: \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ は連続} \} = X \text{ の特異 } n\text{-単体全体.}$$

$A \subset X$ のときは $\sigma: \Delta^n \rightarrow A$ は $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ とみなされるので, $S_n(A) \subset S_n(X)$.

注意 3.1.1 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ が単体でなく単に $\mathbb{R}^N$ の点列のときも特異単体 $\sigma_s: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ が上と同じ式 $\sigma_s(\sum_{i=0}^n t_i e_i) = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ で定められ, 線型写像 $\tilde{\sigma}_s: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ の制限写像になっている. これを (s が順序単体のときも含め) **線型 n -単体** という. 線型 n -単体 σ_s も点列 s と一対一に対応する.

特異単体の face 順序単体 s の第 i -face $\partial^i s = a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n$ に対応するのは, $\sigma_{\partial^i s}: \Delta^{n-1} \cong \partial^i s \hookrightarrow s$ なので, これを特異単体 σ_s の第 i -face といい, $\partial^i \sigma_s = \partial_n^i \sigma_s$ と表す. $s = \Delta^n$ のときの $\sigma_{\partial^i \Delta^n}$ を $d^i = d_n^i$ と表すと:

$$d^i = d_n^i: \Delta^{n-1} \cong \partial^i \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n, \quad d^i(e_j) = \begin{cases} e_j & (j < i) \\ e_{j+1} & (j \geq i) \end{cases},$$

$$d^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, \overset{i}{0}, t_i, \dots, t_{n-1})$$

であり, $\partial^i \sigma_s := \sigma_{\partial^i s} = \sigma_s \circ d^i$ が成り立つ. 実際,

$$(\sigma_s \circ d^i)(e_j) = \begin{cases} \sigma_s(e_j) = a_j & (j < i) \\ \sigma_s(e_{j+1}) = a_{j+1} & (j \geq i) \end{cases} = \partial^i \sigma_s(e_j).$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^{n-1} & \xrightarrow{d^i} & \partial^i \Delta^n & \hookrightarrow & \Delta^n \\ \parallel & & \downarrow \sigma_s| & & \downarrow \sigma_s \\ \Delta^{n-1} & \xrightarrow{\sigma_{\partial^i s}} & \partial^i s & \hookrightarrow & s \end{array}$$

定義 3.1.2 特異単体 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ に対し, (s の場合と同様に) σ の**第 i -face** $\partial^i \sigma$ ($i = 0, 1, \dots, n$) を

$$\partial^i \sigma = \partial_n^i \sigma := \sigma \circ d_n^i = \sigma \circ d^i: \Delta^{n-1} \xrightarrow{\cong} \partial^i \Delta^n \subset \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X, \quad \partial^i = \partial_n^i: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

で定め, $\partial^i = \partial_n^i$ を **face operator (面作用素)** という. ($(\partial^i \sigma)(\Delta^{n-1}) = \sigma(\partial^i \Delta^n)$. $\partial^i \sigma$ は $\sigma|_{\partial^i \Delta^n}$ とみなせる.)

$S_*(X) := \{S_n(X), \partial_n^i \ (0 \leq i \leq n)\}_{n=0}^\infty$ を**特異単体集合 (singular simplicial set)** という.

注意 3.1.2 特異単体 σ の部分単体も, Δ^n の部分単体 $s = e_{i_0} \cdots e_{i_k}$ と $\sigma_s: \Delta^k \cong s \hookrightarrow \Delta^n$ により $\sigma \circ \sigma_s$ で与えられ, $(\sigma \circ \sigma_s)(\Delta^k) = \sigma(s)$. また, s は Δ^n から $(n-k)$ 回 face をとれば得られ, σ_s も同様. 特に, $i \leq j$ のとき,

$$\partial^j \partial^i \Delta^n = \partial^i \partial^{j+1} \Delta^n = e_0 \cdots \check{e}_i \cdots \check{e}_{j+1} \cdots e_n, \quad d^i \circ d^j = d^{j+1} \circ d^i \quad \therefore \partial^j \partial^i \sigma = \sigma \circ d^i \circ d^j = \sigma \circ d^{j+1} \circ d^i = \partial^i \partial^{j+1} \sigma.$$

この様に, 順序単体の間に成り立つ関係はそれらを特異単体に置き換えても成り立つ.

$S_*(X)$ を X の「単体複体」と考えれば, 単体複体のときと全く同様にして chain complex $C_*(X)$ やホモロジー群 $H_n(X)$ が定義できる. ($S_*(X)$ は昔は特異単体複体ともいわれた.) 即ち:

定義 3.1.3 (特異鎖複体) 位相空間 X の (simplicial) singular chain complex ((単体的) 特異鎖複体)

$C_*(X) := \{C_n(X), \partial\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を,

$$C_n(X) := \mathbb{Z}\langle S_n(X) \rangle (= S_n(X) \text{ の生成する自由加群}), \quad \partial\sigma = \partial_n\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d_n^i$$

で定める. ($n < 0$ のとき $C_n(X) = \mathbb{Z}\langle \emptyset \rangle = 0$, $\partial_n = 0$.) $\partial^j \partial^i \sigma = \partial^i \partial^{j+1} \sigma$ より単体複体のときと同様 $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ が成立し, $C_*(X)$ は chain complex になる.

定義 3.1.4 (特異ホモロジー群) 位相空間 X の singular chain complex $C_*(X)$ のホモロジー群を X の (整係数) 特異ホモロジー群 といひ, $H_n(X)$ (詳しくは $H_n(X; \mathbb{Z})$) と表す: $H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z}) := H_n(C_*(X))$

定理 3.1.1 (次元公理) 一点空間 P のホモロジー群は $H_n(P) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$.

証明 各 $n=0, 1, \dots$ について特異 n -単体は一つずつ: $S_n(P) = \{\sigma_n : \Delta^n \rightarrow P\}$. $\therefore C_n(P) = \mathbb{Z}\langle \sigma_n \rangle$. $\partial^i \sigma_n = \sigma_{n-1} \ (\forall i)$, $\partial_n \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} - \sigma_{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & (n=0, \text{奇数}) \\ \sigma_{n-1} & (n=\text{偶数} > 0) \end{cases}$
 $\therefore Z_0 = \mathbb{Z}\langle \sigma_0 \rangle$, $B_0 = 0$. $\therefore H_0(P) = \mathbb{Z}\langle \sigma_0 \rangle$. $Z_{2k-1} = \mathbb{Z}\langle \sigma_{2k-1} \rangle = \mathbb{Z}\langle \partial \sigma_{2k} \rangle = B_{2k-1}$, $Z_{2k} = B_{2k} = 0 \ (k > 0)$.
 $\therefore H_0(P) = \mathbb{Z}\langle \sigma_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$, $H_n(P) = 0 \ (n \neq 0)$.

系 3.1.2 X が一点空間 $P_\lambda \ (\lambda \in \Lambda)$ の非交和空間 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda$ (= 離散空間, 各弧状連結成分が 1 点でも同様)

$$\implies H_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(P_\lambda) \cong \begin{cases} \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\langle X \rangle & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}. \quad \text{特に } H_n(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}.$$

3.1.2 写像

chain map 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, 写像 $S_n(f): S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ と準同型 $f_n: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ を:

$$S_n(f)(\sigma) := f \circ \sigma: \Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y, \quad f_n(\sigma) := f \circ \sigma, \quad \therefore f_n\left(\sum_{i=1}^k m_i \sigma_i\right) = \sum_{i=1}^k m_i (f \circ \sigma_i) \quad (m_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i \in S_n(X))$$

で定める. このとき $\partial^i \sigma = \sigma \circ d_n^i$ より $f_{n-1}(\partial^i \sigma) := f \circ (\sigma \circ d_n^i) = (f \circ \sigma) \circ d_n^i = \partial^i (f_n(\sigma))$. よって

$$f_{n-1}(\partial_n \sigma) = f_{n-1}\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma\right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f_{n-1}(\partial^i \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i (f_n(\sigma)) = \partial_n (f_n(\sigma)).$$

定義 3.1.5 (chain map) 鎖複体 $C = \{C_n, \partial_n\}$, $D = \{D_n, \partial'_n\}$ の間の準同型の組 $f = \{f_n: C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n \iff \begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

をみたすとき f を **chain map**, (**チェイン写像**) または **chain homomorphism** (**鎖準同型**) という.

● 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対し, $f_{n-1}(\partial_n \sigma) = \partial_n (f_n(\sigma))$ より, $f_\# := \{f_n: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は chain map になる.

補題 A (準同型定理の証明の系) $f: G \rightarrow G'$ が (加) 群間の準同型, $H < G$, $H' < G'$ (部分群) とするとき

- (1) $f(H) \subset H' \implies \bar{f}: G/H \rightarrow G'/H'$, $\bar{f}(gH) := f(g)H'$ ($\bar{f}([g]) := [f(g)]$) は well-defined.
- (2) $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$ (正規部分群) (特に G, G' が加群) なら, $G/H, G'/H'$ は (加) 群で $\bar{f}$ は準同型.

補題 3.1.3 chain map $f := \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}: C \rightarrow D$ はホモロジー群の間の準同型 f_* を誘導し, 次をみたす:

$$f_* = H_n(f): H_n(C) \rightarrow H_n(D) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (f_*([z]) := [f_n(z)] \quad (z \in Z_n(C)))$$

- (1) $1_{C*} = 1_{H_n(C)}$, (2) chain map $g: D \rightarrow E$ に対し $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

証明 $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n$ より cycle $z \in Z_n(C)$ に対し, $\partial'_n (f_n(z)) = f_{n-1}(\partial_n(z)) = 0$. $\therefore f_n(Z_n(C)) \subset Z_n(D)$.
 $f_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ f_{n+1}$ より $b = \partial_{n+1}(c) \in B_n(C)$, ($c \in C_{n+1}$) に対し $f_n(b) = f_n(\partial_{n+1}(c)) = \partial'_{n+1}(f_{n+1}(c))$.
 $\therefore f_n(B_n(C)) \subset B_n(D)$. $\therefore$ 補題 A より $f_n|_{Z_n(C)}: Z_n(C) \rightarrow Z_n(D)$ は準同型 f_* を誘導する.

また, (1) $1_{C*}([z]) = [1_C(z)] = [z]$, (2) $(g \circ f)_*([z]) = [g_n(f_n(z))] = g_*([f_n(z)]) = g_*(f_*([z])) = (g_* \circ f_*)([z])$. $\square$

系 3.1.4 (関手性) 連続写像 $f : X \rightarrow Y$ は chain map $f_{\#} := \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$, および 準同型 $f_* = H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を誘導し, 次をみたす:

(1) $1_{X\#} = 1_{C_*(X)}$, $1_{X*} = 1_{H_n(X)}$, (2) 連続写像 $g : Y \rightarrow Z$ に対し $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

証明 f が chain map $f_{\#}$ を誘導することはすでにみた. よって次をみれば補題 3.1.3 により系を得る:

(1) $1_{Xn}(\sigma) = 1_X \circ \sigma = \sigma$. (2) $(g \circ f)_n(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g_n(f \circ \sigma) = g_n(f_n(\sigma)) = (g_n \circ f_n)(\sigma)$. $\square$

系 3.1.5 (特異ホモロジー群の位相不変性) 同相写像 $f : X \rightarrow Y$ は同型 $f_* : H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(Y)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を誘導する.

証明 $g := f^{-1}$ とすると $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$. $\therefore g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 1_{X*} = 1_{H_n(X)}$. 同様に $f_* \circ g_* = 1_{H_n(Y)}$. $\square$

注意 3.1.3 $d_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i \in C_{n-1}(\Delta^n)$ とおけば

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ d_n^i = \sigma_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i d_n^i \right) = \sigma_{n-1}(d_n) \quad (\sigma_{n-1} : C_{n-1}(\Delta^n) \rightarrow C_{n-1}(X)).$$

この様に, 特異ホモロジー群では, 特異単体に対する操作は標準単体 Δ^n について行われ, 一般の特異単体 $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ については chain map $\sigma_{\#} : C_*(\Delta^n) \rightarrow C_*(X)$ を用いて定義される.

• 以下, $\circ$ や $()$ は適宜省略し, 例えば $(g \circ f)(x)$ は $g f x$ と書く.

単体写像 (simplicial map) 単体複体間の写像 $f : K \rightarrow K'$ が **単体写像** $\xleftrightarrow{\text{def}}$

(1) $f(K_0) \subset K'_0$. (頂点は頂点にうつる. ここで K_0 は K の頂点全体の集合)

(2) $s = a_0 \cdots a_n \in K \Rightarrow f(s)$ は $f(a_0), \dots, f(a_n)$ の張る単体. (図)

($f(a_0), \dots, f(a_n)$ の中に同じ頂点があっても良い. 特に $\dim f(s) \leq \dim s$) $\therefore f$ は $f|_{K_0}$ で定まる.)

単体写像 $f : K \rightarrow K'$ に対し 準同型 $f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(K')$ を次式で定める: $s = a_0 \cdots a_n \in K_n$ に対し

$$f_n([s]) = \begin{cases} [f(a_0) \cdots f(a_n)] & (\dim f(s) = \dim s = n) \text{ (順序 } n\text{-単体 } f(a_0) \cdots f(a_n) \text{ の定める有向単体)} \\ 0 & (\dim f(s) < \dim s) \end{cases}$$

このとき $f_{\#} = \{f_n : C_n(K) \rightarrow C_n(K')\}$ は chain map になり, 準同型 $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K')$ ($n \in \mathbb{Z}$) を誘導する.

単体写像 $f : K \rightarrow K'$ に対し, 多面体間の写像 $|f| : |K| \rightarrow |K'|$ を

$$x \in |s| \subset |K|, s = a_0 \cdots a_n, x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \left(\sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0 \right) \implies |f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(a_i) \quad (\in |f(s)| \subset |K'|)$$

で定めると連続になる. この $|f|$ も **単体写像**, あるいは **線型写像** といわれる. (単に f と書かれる.)

(各単体 $s \in K$ 上で連続であることは容易に分る. K の局所有限性により, 各単体上で連続な写像は多面体 $|K|$ 上で連続であることが分る. (局所有限性はこの為の条件でもある.))

注意 3.1.4 順序単体複体 K のホモロジー群 $H_n(K)$ と多面体 $|K|$ の特異ホモロジー群 $H_n(|K|)$ に対し, 順序 n -単体 $s \in K$ に特異 n -単体 $\sigma_s : \Delta^n \rightarrow |K|$ を対応させる事により得られる chain map

$$\varphi = \varphi_K = \{\varphi_n\} : C_*(K) \rightarrow C_*(|K|) \quad \varphi_n : C_n(K) \rightarrow C_n(|K|), \quad \varphi_n([s]) = \sigma_s$$

はホモロジー群の同型

$$\varphi_* : H_n(K) \rightarrow H_n(|K|) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を誘導することが知られている.

位相空間 X が単体分割 $(K, f : |K| \xrightarrow{\cong} X)$ をもつとき, X の特異ホモロジー群 $H_n(X)$ は

$$f_* \circ \varphi_* : H_n(K) \xrightarrow[\varphi_*]{\cong} H_n(|K|) \xrightarrow[f_*]{\cong} H_n(X) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

により $H_n(K)$ と同型である. 即ち, $H_n(X)$ が $H_n(K)$ から求められ, さらに単体分割の取り方によらない事を表している. (このことは特異ホモロジー群の性質を調べた後に証明されるので, ここでは説明できない.)

なお, 単体複体 K の頂点の集合 K_0 には (整列可能定理により) 整列順序を与える事が出来, これにより K は順序単体複体になる.

3.2 対のホモロジー群 (相対ホモロジー群 (relative homology group))

対と写像 一般に, $X \supset A$ の対 (ついで) (X, A) として:

X が位相空間のとき, A は部分空間とし, $X = (X, \emptyset)$ と考え,

X が (加) 群のとき, A は部分 (加) 群とし, $X = (X, e)$ ($X = (X, 0)$), 等と考える.

対の写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ とは, 写像 $f : X \rightarrow Y$ が $f(A) \subset B$ をみたすときを言い, これを

$$f_X := f : X \rightarrow Y, \quad f_A := f|_A : A \rightarrow B \quad \text{の対} \quad f = (f_X, f_A)$$

と考える. (X, A) が位相空間対のときは f は連続写像, (X, A) が (加) 群対のときは f は準同型とする.

補題 (A) (再掲) $f : (G, H) \rightarrow (G', H')$ が加群対間の準同型 $\Rightarrow \bar{f} : G/H \rightarrow G'/H', \quad \bar{f}([g]) := [f(g)]$ は準同型.

部分複体 chain complex $C = (C_n, \partial_n), D = (D_n, \partial'_n)$ が

$$D_n \subset C_n, \quad \partial'_n = \partial_n|_{D_n} : D_n \rightarrow D_{n-1} \quad (\forall n)$$

をみたすとき D を C の **chain subcomplex** (部分鎖複体, 略して subcomplex, 部分複体) という.

部分空間 $A \subset X$ に対し $\sigma : \Delta^n \rightarrow A$ を $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ とみなす. このとき $C_n(A) \subset C_n(X)$ (部分加群). また

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma, \quad (\partial^i \sigma)(\Delta^{n-1}) = \sigma(\partial^i \Delta^n) \subset \sigma(\Delta^n) \subset A \quad \therefore \partial^i \sigma = \sigma \circ d_n^i \in C_{n-1}(A)$$

より $\partial_n \sigma \in C_{n-1}(A)$. 従って $C_*(A)$ は $C_*(X)$ の部分複体になる. ($\sigma \in S_n(X)$ が $\sigma \in S_n(A) \Leftrightarrow \sigma(\Delta^n) \subset A$.)

単体複体 K とその部分複体 L についても同様に $C_*(L)$ は $C_*(K)$ の部分複体になる.

剰余複体 chain complex $C = (C_n, \partial_n)$ と subcomplex $D = (D_n, \partial'_n)$ の対 (C, D) に対し, 補題 A により準同型

$\bar{\partial}_n : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$ が誘導される. $\bar{\partial}_{n-1}(\bar{\partial}_n([c])) = [\partial_{n-1}(\partial_n(c))] = [0] = 0$ ($[c]$ は c の剰余類) より

$$C/D := \{C_n/D_n, \bar{\partial}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

は chain complex になる. これを **剰余複体** (factor complex, quotient complex) という. ($\bar{\partial}_n$ も ∂_n とかく.)

$D = 0_* := \{D_n = 0, \partial'_n = 0\}$ のときは $C/0_* = C$.

位相空間対 (X, A) については, 剰余複体 $C_*(X)/C_*(A)$ を $(\bar{\partial}_n)$ を再び ∂_n と表して)

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A), \quad C_*(X, A) := \{C_n(X, A), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \partial_n[\sigma] := [\partial_n \sigma]$$

と表す. $X, C_n(X)$ は, $A = \emptyset$ として $X = (X, \emptyset), C_n(X, \emptyset) := C_n(X)/\{0\} = C_n(X), C_*(X, \emptyset) := C_*(X)$ とみなす.

注意 3.2.1 $C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A) \xleftarrow{\cong} \mathbb{Z}\langle S_n(X) - S_n(A) \rangle$. 即ち 各 $C_n(X, A)$ は自由加群になる.

定義 3.2.1 位相空間対 (X, A) の singular chain complex $C_*(X, A)$ のホモロジー群を (X, A) の (整係数) **特異ホモロジー群** (又は**相対ホモロジー群**) といい, $H_n(X, A)$ (詳しくは $H_n(X, A; \mathbb{Z})$) と表す:

$$H_n(X, A) = H_n(X, A; \mathbb{Z}) := H_n(C_*(X, A)), \quad H_n(X) = H_n(X; \mathbb{Z}) := H_n(C_*(X)) = H_n(C_*(X, \emptyset)) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

単体複体対 (K, L) も同様に, $C_n(K, L) := C_n(K)/C_n(L), C_*(K, L) := \{C_n(K, L), \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, H_n(K, L) := H_n(C_*(K, L))$.

対の chain map chain complex 対 $(C, D), (C', D')$ 間の chain map $f = \{f_n : (C_n, D_n) \rightarrow (C'_n, D'_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とは

$f_C := f : C \rightarrow C'$ は chain map で $f_n(D_n) \subset D'_n$ ($n \in \mathbb{Z}$) をみたすとき. ($\therefore f_D := f|_D : D \rightarrow D'$ も chain map.)

このとき 補題 (A) により剰余複体の間の準同型 $\{\bar{f}_n : C_n/D_n \rightarrow C'_n/D'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が誘導される.

$\bar{\partial}'(\bar{f}_n[c]) = [\partial' f_n c] = [f_{n-1} \partial c] = \bar{f}_{n-1} \bar{\partial}[c]$ より $\bar{f} = \{\bar{f}_n : C_n/D_n \rightarrow C'_n/D'_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : C/D \rightarrow C'/D'$ は chain map.

これよりホモロジー群の間の準同型

$$f_* = H_n(f) : H_n(C/D) \rightarrow H_n(C'/D'), \quad f_*([z]) := [\bar{f}_n(z)] \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が誘導される.

連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は chain map $f_{\sharp} := \{f_n : (C_n(X), C_n(A)) \rightarrow (C_n(Y), C_n(B))\}_{n \in \mathbb{Z}}$, および $\bar{f}_{\sharp} = \{\bar{f}_n : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)\}$ を誘導する. これを単に $f_{\sharp} = \{f_n : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B)\}$ と表す.

また, $f_{X\sharp} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y), f_{A\sharp} : C_*(A) \rightarrow C_*(B)$ とする.

定理 3.2.1 (関手性) 位相空間対間の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は chain map $f_{\sharp} : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$ およびホモロジー群の準同型 $f_* = H_n(f) : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ ($n \in \mathbb{Z}$) を誘導し, 次をみたす:

- (1) 恒等写像 $1_{(X, A)} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ に対し, $1_{(X, A)\sharp} = 1_{C_*(X, A)}, 1_{(X, A)*} = 1_{H_n(X, A)}$.
- (2) 連続写像 $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ に対し, $(g \circ f)_{\sharp} = g_{\sharp} \circ f_{\sharp}, (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.