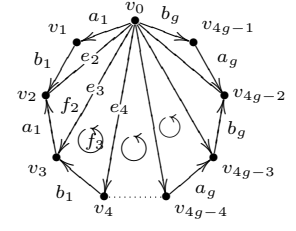


例 2.5 (閉曲面のホモロジー群)

種数 (genus) g の向き付け可能な閉曲面 Σ_g ($g \geq 1$) は, 正 $4g$ 角形 P の辺を同一視することにより得られるので, まず P を次の様に単体分割する:

P の頂点を $v_0, \dots, v_{4g-1}$ ($v_{4g} = v_0$) とし, v_0 から $v_2, \dots, v_{4g-2}$ に対角線を引く. 3 角形 (2-単体) は: $f_1 = v_0 v_1 v_2$, $f_2 = v_0 v_2 v_3, \dots, f_k = v_0 v_k v_{k+1}, \dots, f_{4g-2} = v_0 v_{4g-2} v_{4g-1}$. P の単体分割 K は, $e_i = v_0 v_i$ として,



$$K = \{v_i, (0 \leq i \leq 4g-1), v_i v_{i+1}, (0 \leq i \leq 4g-1), e_i, (2 \leq i \leq 4g-2), f_i, (1 \leq i \leq 4g-2)\}$$

辺の同一視を: $v_0 v_1 \sim v_3 v_2 (= a_1)$, $v_1 v_2 \sim v_4 v_3 (= b_1), \dots$,

$$v_{4i} v_{4i+1} \sim v_{4i+3} v_{4i+2} (= a_{i+1}), v_{4i+1} v_{4i+2} \sim v_{4i+4} v_{4i+3} (= b_{i+1}), (0 \leq i \leq g-1)$$

このとき頂点は $v_{4i} \sim v_{4i+3}$, $v_{4i+1} \sim v_{4i+2}$, $v_{4i+1} \sim v_{4i+4}$, $v_{4i+2} \sim v_{4i+3}$ より

$v_0 \sim v_1 \sim v_2 \sim v_3 \sim v_4 \sim \dots \sim v_{4g-1} (= v)$ と 1 点になる.

$C_i := C_i(K/\sim) = C_i(\Sigma_g)$ は $i \neq 0, 1, 2$ のとき $C_i = 0$. $\therefore H_i = 0$ で,

$$C_0 = \mathbb{Z}\langle v \rangle, \quad \partial_0 v = 0, \quad Z_0 = C_0.$$

$$C_1 = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, e_2, \dots, e_{4g-2} \rangle, \quad \partial_1 v = v - v = 0, \quad Z_1 = C_1, \quad B_0 = 0. \quad \therefore H_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle v \rangle$$

$$C_2 = \mathbb{Z}\langle f_1, \dots, f_{4g-2} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \partial f_1 &= \partial v_0 v_1 v_2 &= v_0 v_1 - v_0 v_2 + v_1 v_2 &= a_1 - e_2 + b_1 &= a_1 + b_1 - e_2 \\ \partial f_2 &= \partial v_0 v_2 v_3 &= v_0 v_2 - v_0 v_3 + v_2 v_3 &= e_2 - e_3 - a_1 &= -a_1 + e_2 - e_3 \\ \partial f_3 &= \partial v_0 v_3 v_4 &= v_0 v_3 - v_0 v_4 + v_3 v_4 &= e_3 - e_4 - b_1 &= -b_1 + e_3 - e_4 \\ &\vdots &(\partial f_1 + \partial f_2 + \partial f_3 &= -e_4) \\ \partial f_{4i} &= \partial v_0 v_{4i} v_{4i+1} &= v_0 v_{4i} - v_0 v_{4i+1} + v_{4i} v_{4i+1} &= e_{4i} - e_{4i+1} + a_{i+1} &= a_{i+1} + e_{4i} - e_{4i+1} \\ \partial f_{4i+1} &= \partial v_0 v_{4i+1} v_{4i+2} &= v_0 v_{4i+1} - v_0 v_{4i+2} + v_{4i+1} v_{4i+2} &= e_{4i+1} - e_{4i+2} + b_{i+1} &= b_{i+1} + e_{4i+1} - e_{4i+2} \\ \partial f_{4i+2} &= \partial v_0 v_{4i+2} v_{4i+3} &= v_0 v_{4i+2} - v_0 v_{4i+3} + v_{4i+2} v_{4i+3} &= e_{4i+2} - e_{4i+3} - a_{i+1} &= -a_{i+1} + e_{4i+2} - e_{4i+3} \\ \partial f_{4i+3} &= \partial v_0 v_{4i+3} v_{4i+4} &= v_0 v_{4i+3} - v_0 v_{4i+4} + v_{4i+3} v_{4i+4} &= e_{4i+3} - e_{4i+4} - b_{i+1} &= -b_{i+1} + e_{4i+3} - e_{4i+4} \\ &\vdots &(\partial f_{4i} + \partial f_{4i+1} + \partial f_{4i+2} + \partial f_{4i+3} &= e_{4i} - e_{4i+4}) \\ \partial f_{4g-4} &= \partial v_0 v_{4g-4} v_{4g-3} &= v_0 v_{4g-4} - v_0 v_{4g-3} + v_{4g-4} v_{4g-3} &= e_{4g-4} - e_{4g-3} + a_g &= a_g + e_{4g-4} - e_{4g-3} \\ \partial f_{4g-3} &= \partial v_0 v_{4g-3} v_{4g-2} &= v_0 v_{4g-3} - v_0 v_{4g-2} + v_{4g-3} v_{4g-2} &= e_{4g-3} - e_{4g-2} + b_g &= b_g + e_{4g-3} - e_{4g-2} \\ \partial f_{4g-2} &= \partial v_0 v_{4g-2} v_{4g-1} &= v_0 v_{4g-2} - v_0 v_{4g-1} + v_{4g-2} v_{4g-1} &= e_{4g-2} - b_g - a_g &= -a_g - b_g + e_{4g-2} \\ &(\partial f_{4g-4} + \partial f_{4g-3} + \partial f_{4g-2} &= e_{4g-4}) \\ &\partial f_1 + \dots + \partial f_{4g-2} &= 0 \end{aligned}$$

Z_2 を求める: $c = m_1 f_1 + \dots + m_{4g-2} f_{4g-2} \in C_2$ について, $\partial c = \sum_{i=1}^{4g-2} m_i \partial f_i = 0$ となる係数 m_i を求めるには ∂f_i に上の式を代入して整理し, 各 a_i, b_i, e_i の係数を 0 とおけば求まるが,

∂c は各 e_i の係数が $-m_{i-1} + m_i$, ($i = 2, \dots, 4g-2$) より $\partial c = 0 \Leftrightarrow m_1 = \dots = m_{4g-2}$.

$\therefore f := f_1 + \dots + f_{4g-2}$ とおけば $c = m_1 f$. $\therefore Z_2 = \mathbb{Z}\langle f \rangle$. $B_2 = 0$ より $H_2 = \mathbb{Z}\langle f \rangle$.

C_2 の基底を取り直して, $C_2 = \mathbb{Z}\langle f, f_1, \dots, f_{4g-3} \rangle$, $B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3} \rangle$. (ここで,

$m_1 \partial f_1 + \dots + m_{4g-3} \partial f_{4g-3} = 0 \Rightarrow m_1 = \dots = m_{4g-3}$, $m_{4g-3} = 0$ が e_i ($i \leq 4g-3$) の係数をみれば分るので $\partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3}$ は $(\mathbb{Z}$ 上) 一次独立. $\therefore$ これらは B_1 の基底.)

$\partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3}$ の最右辺を見れば $e_2, \dots, e_{4g-2}$ は順に $a_i, b_i, \partial f_i$ の一次結合で表されているので, 基底を

$$C_1 = Z_1 = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3} \rangle$$

と取り換える事が出来, a_i, b_i の剰余類を $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ と表せば

$$H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3} \rangle / \mathbb{Z}\langle \partial f_1, \dots, \partial f_{4g-3} \rangle \cong \mathbb{Z}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_g \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

$$\therefore H_2(\Sigma_g) = \mathbb{Z}\langle f \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_g, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_g \rangle \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad H_0(\Sigma_g) = \mathbb{Z}\langle v \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

f は向き付けられた曲面そのものを表すホモロジー類で, 曲面の基本 (ホモロジー) 類といわれ, $[\Sigma_g]$ と表される.

参考: CW 複体

$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ を n 次元単位閉球体, $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ を境界である $(n-1)$ 次元単位球面, $\mathring{B}^n$ を内部の単位開球体とする. 位相空間 X の部分空間 e に対し, $\bar{e}$ をその閉包, $\dot{e} = \partial e := \bar{e} - e$ とする. 全射連続写像 $\phi: B^n \rightarrow \bar{e}$ で $\phi(S^{n-1}) = \partial e$ かつ $\phi|: \mathring{B}^n \rightarrow e$ が同相となるものが存在するとき, e を X の n 次元胞体 (cell) 又は単に n -胞体 (n -cell), $\bar{e}$ を閉胞体 (closed cell), $\dot{e} = \partial e$ を e の境界, ϕ を特性写像 (characteristic map) という. e は開胞体 (open cell) ともいい, 次元を明示して e^n と表す.

($\phi: B^n \rightarrow X$ が連続で $\phi: \mathring{B}^n \rightarrow e$ が同相なら, $\phi(B^n) \subset \bar{e}$ かつ $\phi(B^n)$ はコンパクト. X が Hausdorff 空間のときは $\phi(B^n)$ 閉より $\phi(B^n) = \bar{e}$ が得られるので, $\phi: B^n \rightarrow \bar{e}$ の全射性は明示されていないこともある.)

n -単体 Δ^n や n 次元立方体 I^n は閉球体 B^n と同相なので, B^n を Δ^n や I^n で置き換えてもよい.

位相空間 X の胞体の (ある) 集合 $D = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が次をみたすとき D を X の胞体分割 (セル分割) という:

(i) $e_\lambda \cap e_\mu = \emptyset$ ($\lambda \neq \mu$). (ii) $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$. (iii) $X^n := \cup\{e_\lambda \in D \mid \dim e_\lambda \leq n\}$ とするとき $\partial e_\lambda^n \subset X^{n-1}$.

X^n を X の n -切片 (skeleton, 骨格) という.

Hausdorff 空間 X に胞体分割 D が与えられたとき $X = (X, D)$ を胞複体 (cell complex) という. 胞体数が有限のとき X は有限 ((胞) 複体) であるという. $\max_{\lambda \in \Lambda} \dim e_\lambda$ が存在するとき, これを X の次元とし, $\dim X$ と表す. そうでないときは X は無限次元 ($\dim X = \infty$) とする.

胞複体 $X = (X, D)$ の部分空間 $A \subset X$ が, $e \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \bar{e} \subset A$ ($e \in D$) をみたすとき, $D_A := \{e \in D \mid e \subset A\} = \{e \mid e \cap A \neq \emptyset\}$ は A の胞体分割になる. この胞複体 $A = (A, D_A)$ を X の部分複体 (subcomplex) という.

胞複体 $X = (X, D)$ が次の条件 (C), (W) をみたすとき X を CW 複体 (CW complex) という:

(C) (閉包有限 (closure finite)) $e \in D$ に対し, 閉包 $\bar{e}$ はある有限部分複体に含まれる.

(W) (弱位相 (weak topology)) X は閉被覆 $\{\bar{e} \mid e \in D\}$ に関し弱位相をもつ, 即ち

F が X の閉集合 $\Leftrightarrow F \cap \bar{e}$ は $\bar{e}$ の閉集合 ($e \in D$). ($\Rightarrow$ は常に成り立つ.)

X が有限なら (C),(W) はみたされるので, 有限胞複体は CW 複体である.

単体複体 K の多面体 $|K|$ は開単体 ($\mathring{s} := |s| - \partial|s|$ ($s \in K$)) を胞体 (単体を閉胞体) とする CW 複体になる.

(K が無限でも, 局所有限性から (W) が出る.) 位相空間 X に単体分割 (K, f) が与えられたとき, X は $D := \{f(\mathring{s}) \mid s \in K\}$ を胞体分割とする CW 複体になる.

等化複体 $K/\sim$ に対し, 多面体 $|K|$ からの射影を $p: |K| \rightarrow |K|/\sim$ とすると, $|K|/\sim$ は $D := \{p(\mathring{s}) \mid [s] \in K/\sim\}$ を胞体分割とする CW 複体になる.

CW 複体は単体複体よりも条件が緩いので, 単体分割における単体の個数に比べ胞体の個数が少ない胞体分割が取れる事が多い.

● CW 複体 $X = (X, D)$ の chain complex とホモロジー群は, 実は特異ホモロジー論を用いて定義され, 鎖群 C_n は単体複体の鎖複体と同様, n -胞体の集合 D_n ($:= \{e \in D \mid \dim e = n\}$) で生成される自由加群 ($C_n := \mathbb{Z}\langle D_n \rangle$) として与えられるが, 境界作用素 ∂_n の定義はここでは述べられない. しかし, 等化複体においては境界作用素は単体複体のときと同様になる.